INSTITUTIONES MATHEMATICAE

NUNC PRIMUM

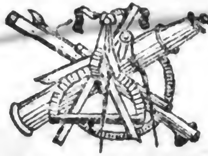
A FERDINANDO PISTILLO

PROPRIA METHODO STRICTIM ELABORATAE

ET NOVIS INVENTIS AUCTAE.

PARS I.

DE ARITHMETICA, ET ALGEBRA.



NEAPOLI MDCCLXXXVII.

Typis Petri Perger.

AUCTORITATE PUBLICA.

A syllabizatione incipimus, quando legere discimus: ab ea abstinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet syllabizationem, quod Exercitatiores eadem in legendo non habent opus? Wolph. Cap. I. §. 36. De Div. cogn. gr.

Docta legant docti: puerilia scripta relinquant;
Has puero segetes sevimus; ille metat.

DEO , OPTIMO , MAXIMO

QVI , VNIVERSA

IN , NVMERO , ET , MENSVRA

ITA , SAPIENTER , DISPOSVIT

VT , EX , IIS

CVNCTA , MATHESIS , SEMINA

AD , HOMINES , DIMANARENT,

FERDINANDVS , PISTILLVS

HASCE . INSTITVTIONES

EXIGVAS , INGENII . SVI , PRIMITIAS

AVCTORI . SVO

D. D. D. D.

ANNO R. S. MDCCLXXXVII.

PRAEFATIO.

QUamvis complures extiterint tum apud veteres, tum apud recentiores, sapientissimi Viri, qui Mathematum Elementa conscripserunt; tamen inter tot celeberrimos Auctores nemo sollicitus fuit hanc Divinam Scientiam iis purgare naevis, expoliareque defectibus, quibus Institutiones, usque adhuc in lucem editae, turpiter scatent. Id in causa fuit, cur post innumera usque ad nauseam Matheseos opuscula ipse prodierim, ac Institutionibus recudendis manus admoverim. Ohe! inquies: quid tu tanti promissor hiatus? Ne te morer,

rer, quid in iis a me sit praestitum, paucis accipe.

In primis ita religiose mathematicam methodum in Arithmetica secutus sum, ut omnia in ea demonstrata sint, quin ne hilum quidem ab Algebra, aut Geometria mutuari opus fuerit. Principia, quae statui, talia sunt, ut nemo ratione praeditus, nisi in meridiana luce caecutire velit, ab iis dissentire valeat. Deinde nihil asseritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non sit deductum. Tyronibus simplicem, ac facilem viam aperui ad dignoscendum, quando ad aliquod problema solvendum Regula Aurea, ipsa *inversa*, vel *directa*, uti debeant. Pro detegendo furto in Corona Hieronis Regis non duplicis Positionis Regula, quae in Arithmetica demonstratione caret, aut nimis prolixa, et implicata opprimitur, usus sum; sed novam, et facilem adinveni, eamque clara, et ex veris principiis petita, demonstra-

stratione fulcivi. Praeterea se se offert nova methodus, qua Alligationis problema suam sortitum est demonstrationem. Tandem legentibus novae Regulae, methodique occurrent, quas brevitatis gratia recensere praetermitto.

In Algebra praeter adcuratam methodum plura reperiuntur, quae hic singulatim adnotare non est otium. Traditur modus geometricus, ac facillimus adaptandi angulum ad verticem alterius, qui anguli dati sit dimidium. Nec non modus simplex, licet practicus, datum angulum trisecandi. Inter alia nova problemata eminet sequens: Ex data quantitate praestare Cylindrum, cujus altitudo quadrupla sit diametri basis ejusmet. Et caetera.

Postremo in Geometria tum Plana, tum Solida in id totus incubui, ut omnes defectus, et naevos, quibus Definitiones, Axiomata, Theorematum Demonstrationes, Problematumque, horumque Resolutiones

laborabant, aqua et igni, si ita loqui fas est, penitus interdixerim. Exulant ergo ex hoc Opusculo Aequemultiplicium, et partium infinite parvarum in demonstrando usus; nec non inter datas quantitates partium aliquotarum quaelibet suppositio. Quae sane quam sint a recta geometrizandi ratione aliena, nemo, cui in Mathesi palatus sapiat, non videt. Novas Definitiones, Axiomata, et Demonstrationes in aeternum duraturas, et ex scriniis meis penitus depromptas, substitui. Hujus Praefatiunculae fines excederem, si nova Additamenta, quae in hisce meis Institutionibus prae caeteris reperiuntur, recensere vellem. Ex his notatu digniora, ut dignoscas, asterisco (*) signata invenies.

Methodum, quam sequimur, Tyronum captui ut cum maxime adcommodatam, et rei naturae apprime convenientem, alii praeoccuparunt; sed non ita religiose usi sunt, ut ab ea identidem non aberraverint.

rint. Ego in toto operis cursu ne latum quidem unguem ab ea discessi. Quum enim sermo est de Lineis, et Angulis, solae Lineae, Angulique in Demonstrationibus mihi adjumento sunt: Quum de Triangulis, sola triangulorum ope omnia resolvuntur, ac demonstrantur: et sic de caeteris. Et re quidem vera Anguli bisectionem absque triangulis demonstro. Itidemque independenter ab his (*a*) Parallelarum Theoria pertractatur, et alia sexcenta; et haec, quin in minimo Arithmeticam,

(a) Hinc satisfactum est Cl. G. J. 's Gravesande, qui in sua Introductione ad Philos. §. 1085. sic queritur: *Si Geometriae Elementa docere suscipiam, juxta ultimam Regulam; haec erit divisio, et hic Ordo. Primum agendum erit de Lineis, tum de Triangulis, et aliis Figuris rectilineis, postea de Circulis etc. Sed imperfecta admodum esset tractatio. Quae Lineas parallelas, et perpendiculares spectant, ex demonstratis de Triangulis deduci debent, etc. Quare haec divisio, quantumvis cum natura Subjecti convenire videatur, rejicienda est.*

cam, et Algebram consulere fuerit necesse. Tute lege: pernosces enim quam nullis laboribus parserim, ut in Institutionibus Mathematicis omnia offendicula removerem. An vero voti compos factus sim, Sapientum esto Judicium.

ARITH-

ARITHMETICAE

LIBER PRIMUS.

CAPUT PRIMUM.

De Integrorum Algorithmo.

DEFINITIONES.

1. *ARithmetica* est scientia, quae numerorum ope sua problemata solvit. Ejus objectum est *quantitas discreta*, sub qua denominatione intelligimus id, quod minui, vel augeri potest in disjunctum.
2. *Numerus* est unitatum complexio.
3. *Unitas* est numeri principium, et denominatio, cujus gratia quantitas dicitur una. Haec partes habet, quaeque di-

dicuntur *fractiones*: ipsa, et reliqui numeri ascendentes, *Integri* appellantur.

4. Numeri ab unitate ad decadem usque *Simplices* dicuntur, modo vero singillatim sumantur; alioquin series in numerum compositum converteretur. Hujusmodi numeros arabicis notis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 exprimimus, quibus dextrorsum zero apposito, hoc est nota 0, non sinistrorsum (cum in se nil sonet), in tot decades crescit numerus, quot unitates in se habet; ex. gr. numerus 9, novem complectitur unitates; ipsi adnexa cyphra 0, habetur 90, novem patefaciens decades. Caeterum si idem 90 in decuplum augere velimus, adposita dextrorsum altera nota 0, exsurgit 900, nonaginta signans decades.

5. Arithmeticae *Operationes*, quibus tota innititur, et versatur haec Scientia, quatuor sunt: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, et *Divisio*. Quidam ad quinque eas protendunt, et praedictis addunt *Numerationem*, sive methodum legendi compositos numeros. Nos vero superiori divisione contenti simus; ideo

6. *Additio* est plurium numerorum in unum, illis omnibus omnino parem, complexio. Numeri addendi, *Dati* dicuntur: ipsa complexio vero, *Summa* nuncupatur.

Ejus

Ejus signum est +, *plus* dictum: hinc 2 + 8 + 6 denotatur, numeros 2, 8, 6 simul addi debere.

7. Subtractio est inter duos numeros differentiae inventio. Subtrahendus (qui noscitur ex praepositione *a*, vel *ab*) *Minuendus* dicitur; Subtrahens vero, *Minuens*; et differentia, *Residuum* vocatur.

8. Coroll. Patet igitur, Subtractionem in duobus disparibus numeris locum tantum habere posse.

9. Signum, quo Subtractio ostenditur, est — *minus* dictum: posito 8 — 6 dignoscitur, ex 8 subduci debere 6.

10. *Multiplicatio* est toties numerum datum sumere, quoties in altero dato unitas continetur. Numerum exortum *Productum* vocamus; et prout unus in alium multiplicari proponitur, ita *Multiplicandus*, et *Multiplicans* nominatur. Hujus operationis signum est ×; sic 2 × 3 denotat 2 duci debere in 3.

11. Coroll. Unitas non multiplicat.

12. *Divisio* inquirit numerum, qui, quoties unus in altero dato contineatur, exprimat. Numerus ortus, *Quotus*; et prout proponitur unus per alium dividi, ita *Dividendus*, et *Divisor* appellatur.

13. Coroll. Unitas non dividit.

14. Divisionis signum est hoc —. Divisor po-

ponitur subter lineam, supra vero Dividendus. Ita $\frac{3}{2}$ exprimitur, quod 3 dividi debeat per 2.

ANIMADVERSIO.

15. Arithmetica cum suis, et minime dubiis innitatur principiis, in ea declaranda mathematicam methodum sequi ad rem existimamus. Haec est, 1. *Definitiones* aliquarum vocum ob oculos ponere; 2. *Postulata*; 3. *Axiomata*; 4. *Lemmata* alicui propositioni praemittere, si opus; 5. *Problemata*, seu *Theoremata* proponere; 6. *Corollaria*, vel *Scholia* supponere. Horum vocabulorum notio haec sit:

16. *Definitio* est unius rei ab aliis adaequata distinctio, verbis apprime expressa. Hujusmodi voces, si rei naturam spectant, definitio dicitur *Essentialis*; si vero proprietates enunciat, *Descriptiva* vocatur.

17. *Propositio* est oratio vel de aliquo demonstrando; quo casu ea dicitur *Theorema*; vel de re facienda, et nominatur *Problema*: Hoc autem si indiget tantum expositione, *Postulatum*; si vero illud, *Axioma* vocatur. Si alterutrum praecedat aliquam propositionem prae auxilio, ut ita dicam, ubi extranea videretur, acquirit nomen *Lem-*

ma

matis; si sequatur ad ejus majorem intelligentiam, vel utilitatem, et usum, *Scholion* dicitur: tandem *Corollarium* dicitur propositio, si apte ex antecedenti deducitur.

POSTULATA.

18. Numeri compositi quovis signo notas segregare.
19. Numeros, ut libet, collocare.

AXIOMATA.

20. Partes simul sumptae suo toto aequantur.
21. Zerus zero additus, vel ex ipso subtractus, vel in ipsum ductus, vel per ipsum divisus, zerum reddit.
22. Zerus numero additus, numerum restituit, et contra.
23. Zerus ex numero subtractus, hunc non minuit.
24. Si zerus in numerum ducatur, vel contra, productum, si licet, zerus est.
25. Numero per zerum diviso, numerus oritur, et intactus evadit; zerus enim non dividit.

PRO-

PROLOGOMENON.

16. Antequam hujus Scientiae praecepta tradamus, methodum legendi numeros compositos non ignorare necessario duximus. Si enim eos, pluribus figuris constantes, numerare, hoc est valorem seriei exprimere nescimus, ad quid Arithmeticae operationes? In illam itaque ingrediamur, adnotando, dextrorsum incipiendo, haec notas significare: primam, *unitates*; secundam *decades*; 3^{m} *centenarios*; 4^{m} *unitates millium*; 5^{m} *decades millium*; 6^{m} *centenarios millium*; 7^{m} *unitates millionum*, et ita porro usquedum adfuerint notae. Post duodecimam numericam figuram de *billionum* (brevitatis gratia sic loqui liceat) unitatibus; decadibus etc.; post duodeviginti cyphras de *trillionum* unitatibus, decadibus etc. sermonem usurpamus.

His praenotatis, et bene perceptis ad quamvis numerorum seriem legendam planus est cursus. Methodus itaque sit: Dati numeri compositi notae ternae pro singulis membris dextrorsum commatibus distribuantur, et supra notam secundi, quarti, sexti commatis etc. scribantur 1, 2, 3 etc. Numeri unitatem habentes, *milliones* sunt; habentes notam 2, *bil-*

billiones ; habentes in suis membris notam 3 , *trilliones* . Tali pacto datum compositum numerum distribuimus; unde recte legemus : *Duo trilliones , quingenta triginta millia , dugenti sexaginta quinque billiones , sexcenta triginta duo millia , centum sexaginta octo milliones , biscentum quinquaginta tria millia , tercentum septuaginta duo* .

$2^{3}, 530, 265^{2}, 632, 168^{1}, 253, 372.$

27. Ex dictis prono alveo fluunt: 1°. notas singulas in numero composito non retinere suum simplicem valorem tantummodo : ex. gr. numerum 211 *biscentum* et *undecim* legimus , non *duo*, *unum* et *unum* ; hoc vero si exprimere velimus , commatibus intermediis pro singulis notis opus est .

2°. Ad dignoscendum inter plures integros et compositos numeros quinam majoris sit valoris , duo requiri : 1°. An pares numero figuras singuli dati habeant ; nam si numerus aliquis plures contineat notas , major hic erit caeteris in valore ; cum contineat vel decades , vel centenarios etc. , quos caeteri non complectuntur : 2°. Notis paribus , quinam sinistrorsum cyphram extremam majorem comprehendat ; et hic major erit ; continet enim vel decadum , vel centenariorum etc. numerum majorem .

28. Ceterum tria supersunt adnotanda; et scitu necessaria: 1°. In multiplicandis duobus invicem numeris, minorem pro multiplicante (10) poni apud omnes in usu esse; et hunc morem utilitate non carere suo loco apparebit: 2°. Tirones ambiguitatem pati in discernendo *Divisore* a *Dividendo*: norma itaque sit; Numerus post particulam *per* pro *Divisore* est tenendus; si dicatur ex. gr. numerus 12 dividatur per 3, ipse 3 pro divisore (12) est habendus. 3°. Usum cyphrarum non ignorare. Hae notarum in serie deficientium vices supplent (26): unde si arabicis notis quis signare velit *centum* et *quinque*, ita scribat 105, scilicet loco decadum *zerus* ponatur. Si vero plures desunt notae, totidem cyphras sufficere opus sit, quot notae seriei absunt: videlicet eaedem nil agunt aliud, nisi ut data nota suum locum occupet, ad hoc ut datum valorem exprimat. De reliquis signis haec habeantur.

29. Signum *aequalitatis* est $=$ (vel ∞, uti in aliquibus Auctoribus), ita $L = V$ indicat L aequalem esse quantitati V. Hujusmodi signum in proportionibus adhiberi quoque solet, et merito: Nam duas rationes aequales esse denotat.

30. Signum *majoris aequalitatis* est $>$; hinc

C > S denotat C majorem ipsa S : et inversum, *minoris aequalitatis* dicitur ; sic C < L indicat C minorem ipsa L.

PROBLEMA I.

31. *Numeros datos* C, D, E *addere*.

Resolutio. Disponantur Dati, ut unitates unius seriei sub alterius unitatibus sint, decades sub decadibus etc.; et, ducta lineola L, addatur prima columna verticalis 5, 7, 0, cujus summae (22) prima nota 2 ponatur sub ipsa columna, et secunda 1 addatur figuris secundae columnae 2, 6, 1, ex quibus exurgit 10; zerus ponatur sub decadibus, et addatur 1 aliis numeris tertiae columnae 1, 1, 2, quorum summa 5 sub ipsa tertia columna. Erit ortus numerus compositus G quaesita summa.

C	1	2	5
D	1	6	7
E	2	1	0
L			
G	5	0	2

Demonstratio. Cum primae columnae aggregantur Notae, unitates nimirum, unitas, quae retinetur, decadem sonat; ideoque apposita fuit secundae columnae figuris, nempe (26) decadibus, quarum icciroo summa non decem unitates, sed totidem decades exprimunt, hoc est *centum*; qua de causa subter columna posito

zero, unitati datus fuit locus (28, 3°) centenariorum. Q. E. F.

32. Coroll. Si unitatum, decadum etc. loco in verticalibus columnis cyphrae fuerint, centenariorum etc. aggregatio cum duobus zeris summa Datorum esset. Hinc quoque cum zeri numeris (21) additi, numeros restituant, ad series, impari cyphrarum numero praeditas, addendas, nil requiri aliud patet, nisi integros addere, et summae cyphrarum seriem minorem apponere.

SCHOLION.

33. Additionis ratio magis patet, si numerorum columnas, veluti disjunctas concipiamus, et singulas addamus, uti in exemplo videre est. Prima enim columna L = M, secunda C = N, et tertia V = O. Hujuscemodi partiales summae tali pacto sunt dispositae, ut unitates sint sub unitatibus, decades sub decadibus, et centenarii subter centenariis: ideo eas addendo, summa omnibus datis V, C, L oriri debet (20) aequalis: columnae enim additae nil valoris amiserunt, cum singu-

		V	C	L
		3	5	6
		6	8	9
		4	2	1
M			1	6
N		1	5	
O	1	3		
	1	4	4	6

gulae summae proprio loco (26) appositae fuerint.

PROBLEMA II.

34. *Additionem* C *examinare*.

R. Ope lineolae S (18) sejungatur ultima series L ex aliis; deinde addantur numeri V, M, O in X, ducta G, summae X relicta series L (31) addatur in Y, ducta K. Hoc peracto, si aggregatum Y aequale sit primae summae (27) C, bene se habuit operatio; si secus, errore turbatur, et tali pacto demonstratur.

```
  V 3 2 1 6
  M 5 2 3 2
  O 8 9 6 2
  S ———————
  L 6 8 2 1
  —————————
C 2 4 2 3 1
G ——————————
X 1 7 4 1 0
K ——————————
Y 2 4 2 3 1
```

D. Summa X aequalis est numeris V, M, O, hoc est aequalis summae C sine serie L; qua igitur addita aggregato X, quidquid prodibit, necessario aequari debet C. Nam numeros idem est unico actu in unam summam colligere, ac eos in plures summas dispescere, et has in unam tandem conjungere, quod peractum fuit in hoc examine; ergo etc. Q. E. F.

35. Coroll. Patet ex dictis, numeros multarum serierum in unam summam legi-

time colligi, si hanc constituant omnes summae plurium serierum pro vice additarum.

PROBLEMA III.

36. *Numerum S ex A subtrahere.*

R. Ponatur S sub A eodem modo, quo diximus de numeris addendis, et ducta lineola C, ita prosequatur: Ex 3 demto 2, remanet 1, qui ponatur sub ejus columna N: ex 6 demto 3, superest 3, hic scribatur sub columna M; tandem ex 5 ablato 4, restat 1, qui itidem ponatur cum aliis, eritque residuum quaesitum ipse numerus compositus D.

		M	N
A	5	6	3
S	4	3	2
C			
D	1	3	1

D. Hic nihil aliud est demonstrandum, nisi residuum differentiam esse inter duos datos numeros. Hoc plane patet, si intelligatur, agendo ut supra, unitatibus imminui unitates, decadibus decades, (26) centenariis centenarios. Q. E. F.

PROBLEMA IV.

37. *Numerum V ex S subtrahere.*

R. Ex zero o tolli nequit 3, ideo ex se-

sequenti 4 auferatur unitas, et ortus 10 minuatur numero 3; residuum 7 ponatur sub una columna: deinde quia ex 3, hoc est ex 4 unitate deminuto, auferri nequit 6, demta unitate, ut ita dicam, ex 0, dicamus, ex 13 auferatur 6, et residuum 7 subscribatur propriae columnae; ex 0, hoc est ex 9 (unitate enim minuimus) ablato 8, superest 1, et notetur prope 7: tandem ex 5, unitate minuto, sumto 3, residuum 1 ponatur cum aliis notis sinistrorsum in C.

S	5	0	4	0
V	3	8	6	3
C	1	1	7	7

D. Unitates notis additae non unitates realiter sunt, verum vel decades, vel centenarii etc. quod facile est intelligere (26). Unum vero est hic declarare opus, scilicet quum numero 3 adjunximus unitatem, videlicet *centum*, numerus 50 resolutus fuit in 49 centenarios, hac de causa numero 9 subduximus 8, et numero 4 totum 3, qui pariter milliaria exprimit. Q. E. F.

PROBLEMA V.

38. *Subtractionis* L D *examen instituere* :

R. Residuo C adjiciatur Minuens D : si summa reddit Minuendum , Subtractio bene peracta est ; Si e contrario pro Minuendo L oriatur dissimilis numeri series , in Subtractione erratum fuisse indicium est .

L	1	0	0
D		5	5
C		4	5
	1	0	0

D. Subtractio est excessum invenire Minuendi supra Minuentem : hinc residui C una cum Minuente D aggregatum aequale esse debet numero , qui ipsi L (20) subductus fuit . Q. E. F.

PROBLEMA VI.

39. *Numerum* V *in* S *multiplicare* .

R. Constitutis numeris V et S , veluti si addendi essent (26) , ita procedatur : ducatur 8 in 2 , exurgit 16 ; ponatur 6 sub primo numero 2 , et 1 addatur ipsi 8 ducto in sequentem 1 , et summa 9 reponatur sub secunda nota ; dein ducatur 8 in 6 , et producti 48 ponatur 8 sub tertia Multiplicandi nota ; et ad-

S		2	6	1	2
V					8
D	2	0	8	9	6

addatur 4 Multiplicanti 8 ducto in 2; aggregatum 20 sit cum aliis in D: hoc productum quaerebatur.

D. In prima multiplicatione ductae sunt unitates 8 in 2, ortus 16 est decas una, et unitates 6; ideoque unitates 6 posuimus (26) primo loco, et decadem retinuimus. In secunda ductae fuere unitates eaedem 8 in decadem 1, exortis decadibus 8 additur retenta, summaque ponitur suo situ (26). In tertia ducuntur unitates 8 in centenarios 6, exortus 48 denotat centenarios 8, et milliaria 4; ideo suo loco ponuntur centenarii 8, et milliaria 4, sibi adjuncto producto 8 in 2 milliaria. Q. E. F.

PROBLEMA VII.

40. *Numerum* D *in* S *multiplicare*.

R. Ducatur (39) 5 in D, et productum sit in V; deinde 2 in eundem D, et productum ponatur in X, incipiendo ex secundo numero ipsius V; tandem colligantur (31) series V et X; summa L est productum, quod quaerebatur.

D		2	6	3
S			2	5
V	1	3	1	5
X	5	2	6	
L	6	5	7	5

D, Idem

D. Idem, quod diximus numero 39, intelligatur hic de Multiplicatione numeri 2 secundae figurae Multiplicantis, qui decades (26) sunt; ideo suo loco posuimus. Q. E. F.

PROBLEMA VIII.

41. *Multiplicare* V *in* S.

D. Posito numero minori V sub majori S, tali methodo opus patretur: ducatur 3 in 3, ortus 9 ponatur (40) dicto suo loco; postea ductus idem 3 in 0 dat 0 (24), qui ponatur suo loco: tandem collocetur sub linea productum 3 in 6, videlicet 18; deinde ducto 0 Multiplicantis in totum Multiplicandum S, habetur (24) 000, qui locantur (40) uti dictum supra. Demum multiplicetur 2 tertia Multiplicantis figura in S, provenit D: productorum M, L, et D (31) fiat summa in C, quae est productum datorum.

		S	6	0	3	
		V	2	0	3	
	M	1	8	0	9	
	L	0	0	0		
D	1	2	0	6		
C	1	2	2	4	0	9

D. Est eadem demonstratio, ac de antecedentibus. Addendum tantummodo est, multiplicationem tertiae notae 2 in

in S centenarios reddere (26); ideoque producti notae primo repositae fuere centenariorum loco sub tertia columna, etc. Q. E. F.

42. Coroll. I. Si loco cyphrarum in secunda serie L ponatur productum ex 2 in S, sub tertia columna incipiendo, eundem numerum oriri in additione facile comprehenditur.

43. Coroll. II. Si pro nota 3 in factore V zerus sit, pro productis exurgerent series M et L, (24) omnes zeri; ideoque in summa numerum tantum 12 haberemus, ceteras notas totidem zeros. Hinc pro multiplicandis numeris, dextrorsum zeros continentibus, nil aliud agere opus esse patet, nisi numericas notas in se ducere, et producto tot zeros, quot in utroque ex factoribus inveniuntur, dextrorsum adnectere.

44. Coroll. III. Ex dictis hucusque notum fit, reiteratam additionem Multiplicationem esse; cum dicimus enim ex. gr. ducatur *6* in 8, intelligimus sexies 8 simul sumi debere: uti in primo exemplo octies seriem S sumi petebatur.

PROBLEMA IX.

45. *Multiplicationis* D *in* S *examen instituere*.

R. * Factor minor, sive Multiplicans S in partes dispescatur, ex. gr. in duas V et C: Harum singulae alternatim ducantur (39) in alterum factorem, et producta

I	4	2	0	8	V	1	6
G	2	3	6	7	C		9
	6	5	7	5			

I, et G in unam summam colligantur in E (31), quae si aequalis est (27,2°) producto L, absque erratu fuit operatio.

D. Cum multiplicatio repetitam sonet additionem, sive unico actu vigintiquinquies sumatur factor D, vel primo sexdecies, secundo novies, et in unum addamus haec orta, idem oriri debere per se noscitur; cum veluti partes concipi possint, et realiter sint, hujusmodi producta. Q. E. F.

PROBLEMA X.

46. *Numerum* M *per* L *dividere*.

R. Ponatur sinistrorsum Divisor, Dividendus vero dextrorsum, lineola C perpendiculariter interposita. Dividendi pri-

L	C	M
4	4	8 0
D		
1 2 0		

prima nota 4 continet semel tantum Divisorem L : posita igitur unitate sub Divisore in D pro Quoto, observetur deinde quoties secunda nota 8 contineat L ; Quotus hic est 2 , qui ponatur dextrorsum juxta Quoti D notam : tandem divisae ultimae notae o per L Quotus o (25) ponatur dextrorsum in D , habetur Quotus totalis D.

Demonstratio hujus problematis ex ipsis principiis descendit. Disjungatur itaque datus numerus M in partes, nimirum 400, et 80. Divisor 4 in primae partis figura 4 semel continetur, videlicet *centies* ; quia quatuor centenarios exprimit ipse 4, primae partis figura; 2°. idem 4 Divisor in 8 secunda parte bis continetur, scilicet duodecies ob octo decades, quas ipsa in se claudit : his Quotis simul (31) additis, exurgit 120 integer Quotus totius divisionis. Q. E. F.

PROBLEMA XI.

47. *Numerum* M *per* C *dividere*.

℞. Dispositis numeris, uti in antecedenti problemate, observetur 1°. : an duas notas in C contineant duae primae in M;

C					M		
2	3	|	1	2	0	5	6
V					5	5	
5	2	$4\frac{4}{23}$				9	6
							4

M; sin minus, an tres etc., et quoties? sicuti 5 in exemplo; ponatur hic in V, et excessus sub ultima nota 0, et hunc prope quarta Dividendi figura 5: 2°. quoties 55 contineat idem C? nempe 2, et ponatur in V juxta aliam, et excessus sub ultima 5, et propius huic alia Dividendi figura: 3°. ortus numerus 96 quoties in se habeat C ponatur pariter in V, et excessus 4 sub 6; qui 4 supra, infra lineolam vero, dextrorsum in Quoto positam, Divisor C notetur; et sic habetur quod quaerebatur.

D. In partes resoluto Dividendo, habemus 12000,50, et 6: dividendo per C numerum 120, hunc tamquam 12000 consideravimus, cum quotus 5 pro 500 habuimus, positus quum fuerit loco (26) centenariorum. Residuo 5, nempe 500, posito suo situ cum quarta Dividendi nota 5, hoc est 50, et toto 55 diviso per eumdem C, habetur 2, sive 20, quem ideo videmus (26) suo loco in V, et sic de reliquo. Tandem ortum $\frac{4}{23}$ legitur *quarta pars vigesimae tertiae unitatis*; et *fractio* est, de qua sermo habebitur, cum proxime de

de fractis locuturi sumus. Q. E. F.

48. Coroll. I. In Dividendo si dextrorsum zeri sint, et numerus possit exacte per Divisorem dividi, sat est Dividendi numericas notas per Divisorem dividere, et Quoto tot cyphras adnectere, quot dextrorsum in Dividendo erant. Caeterum si in utroque zeri sint, resecentur tot zeri in Dividendo, quot in Divisore, et numerorum solummodo fiat (46) divisio.

49. Coroll. II. Si in Dividendo zeri non sint, sed in Divisore tantum, resecentur tot numeri in ipso dextrorsum, quot in hoc sunt cyphrae; peractaque divisione de reliquis, illi habeantur pro residuo, eodem manente divisore dato, et huic residuo addatur sinistrorsum aliud, si fuerit ex ipsamet divisione.

PROBLEMA XII.

50. *Antecedentem divisionem examinare.*

R. Ducatur Divisor C in Quotum V (39) sine fractione, productum D si una cum residuo aequatur (27, 2°) Dividendo, sine

$$\overset{C}{23} \times \overset{V}{524} = \overset{D}{12052}$$

$$\overset{D}{12052} + 4 = 12056$$

ne errore est Quotus inventus V.

D. Divisionis Quotus V jam notum (11) facit quoties Divisorem C Dividendus contineat; ergo si illum in Quotum ducimus, et producto D residuum 4 addamus, quidquid oritur, necessario Dividendo aequari debet. Q. E. F.

ANIMADVERSIO.

51. Tum in Additione, tum in Subtractione singulae columnae, sive series verticales ejusdem speciei sint opus est: in rebus similibus subsistit *Additio*, et *Subtractio*. In *Multiplicatione* autem, et in *Divisione* numeri dati esse nequeunt ejusdem speciei. Ducimus ex. gr. centum nummos in modios decem, vel per hos dividimus; et non dividimus modios 10 per alios 10 modios, vel in ipsos ducimus. Itaque si modius tritici denariis 5 valeat, et noscere velimus ad quid pretii assurgunt modii 10, multiplicatione quaestionem solvere opus est; et si contra quaeratur, divisione res expeditur.

CAP.

CAPUT II.

De Fractorum Algorithmo.

DEFINITIONES.

52. FRactio, seu *Minutia* est unitatis pars aliqua: veluti si ipsa in quinque partes dividatur, et de his tres exprimere velimus, dicimus *tres quintas* ipsius unitatis; et sic scribitur $\frac{3}{5}$.

53. Coroll. I. Ad exprimendam fractionem duos necessario requiri numeros patet, *Numeratorem* nempe, qui ponitur supra lineam, et *Denominatorem*, qui subter eandem. Denominator notum facit in quot partes integrum numerum partiri oporteat: Numerator vero quot ex illis partibus sumere debeamus.

54. Coroll. II. Si numerator fuerit Denominatori aequalis, fractio (si licet) integro aequivalet: tot enim partes accipiendas Numerator exprimit, in quot divisum fuisse integrum Denominator patefacit. Si ipso sit major, plus quam integrum fractio continet. Itaque

pro primo exemplo habetur $\frac{2}{2} = 1$; et pro secundo , $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$; nempe fractio aequalis est quoto , orto ex divisione (46) Numeratoris per denominatorem .

55. Coroll. III. Si sub integro quovis , ducta lineola , ponatur unitas , oritur, ut ita dicam , integri in fractionem reductio , valore integri dati non immutato .

56. Coroll. IV. Idem est legere fractionem $\frac{2}{3}$ *duas tertias* unius integri , hoc est integrum unum dividere per denominatorem 3 , et quotum bis accipere, ac duos integros (tot enim exprimit Numerator) dividere per 3 , et quotum semel sumere .

57. Si fractionis partes , scilicet valorem ejus augere volumus , non requiritur aliud , nisi , eodem manente Denominatore , Numeratorem augere: crescunt enim partes tollendae , expressis iisdem in denominatore . Et contra , subtractione agendum , si contrarium quaeratur .

58. Coroll. Si fractiones habent denominatores aequales , se habent uti Numeratores .

59. Si fractionis partes iterum accipiantur, oritur *fractio fractionis* , seu *minutia minutiae* ; uti ex. gr. si exprimere velimus

mus *duas quintas trium quartarum*, ita scribitur $\frac{3}{4} \mid \frac{2}{5}$.

60. Partes vel sunt *aliquotae*, si numerum datum, cujus partes sunt, sine residuo metiuntur; vel *aliquantae*, si contra se habent. Sic numerus 2 ex. gr. pars est *aliquota* numeri 6, quia ter repetitus adamussim huic aequatur; *aliquanta* vero est numeri 7; etenim quotiescunque ille reiteratur vel deficit, vel excedit ipsum 7.

61. Si numerus alium nullo modo metiri valet, hoc est, si ille pars aliquanta sit alicujus numeri, hic *in se primus*, vel *incommensurabilis* nominatur; uti est 12 relatione habita ad 5: si contra se habet, *commensurabilis* nuncupatur, uti est 63, ratione habita ad 9. Quod si plurium numerorum unus inventus sit, qui exacte singulos metiri possit, hic eorum *communis mensura* vocatur; ita 4 communis est mensura numerorum 8, 12, 16, non vero 10, 14, 21, qui ideo *incommensurabiles* dicuntur.

62. Fractio dicitur ad *minimos terminos* reduci, cum, firmo manente ejus valore, tum Numerator, tum denominator minuitur.

63. Fractionis *ad idem nomen* reductio est pluribus fractionibus, dissimiles denominatores habentibus, firmo earum va-

lore, eundem denominatorem tribuere.

AXIOMA.

64. Si fractionis tum Numerator, cum denominator per eundem, vel per eosdem numeros dividatur, multipliceturve, ea pristinum valorem non amittit. Si duplicatur enim, vel triplicatur etc.; aut subduplicatur, vel subtriplicatur etc. tum numerator, tum denominator, valorem eundem retinere minutiam facile est comprehendere: crescunt enim pari passu, vel decrescunt tum partes divisae, tum accipiendae.

65. COROLL. I. Si alicujus fractionis Numerator pro denominatoris *parte aliquota* habetur, ad minimam omnium possibilium illam reducendam satis est unitatem ponere pro Numeratore, pro denominatore vero, quotum ex divisione denominatoris per Numeratorem ortum.

66. COROLL. II. Si plurium fractionum numeratores aeque contineantur in suis denominatoribus, hujusmodi fractiones sunt inter se aequales.

PRO-

PROBLEMA I.

67. *Numerorum* S *et* L *maximam communem mensuram invenire* .

R. Dividatur numerus (46) L per S minorem , et hic per residuum 4 , quod tandem per secundo ortum residuum 2 , habetur zerus , qui demonstrat maximam communem mensuram esse ipsum 2 .

S	1	3	8
L	2	8	0

D. Residuum 2 adamussim metitur ipsum 4 ; sed 4 metitur S , residuo 2 ; ergo ipse 2 pars est aliquota etiam ipsius 4: tandem quia S metitur majorem L , excessu 4 ; idem 2 quoque pars aliquota est ipsius S ; nam ipsum 4 metitur pariter 2 . Q. E. F.

68. Coroll. Hinc , inventa communi mensura inter duos terminos fractionis, facilis erit ad *minimos terminos* ejus reductio ; si scilicet tam numeratorem , quam denominatorem per ipsam dividamus , et quotos respective designamus. Hujus ratio pendet ex numero 64.

PROBLEMA II.

69. *Fractiones* C *et* S *ad idem nomen reducere*.

R. Ducatur numerator fractionis C in denominatorem fractionis S; productum 3 numerator sit primae: dein ducatur 2 denominator C in numeratorem fracti S; productum 2 sit numerator alius fractionis S. Tandem productum ex 2 in 3, ex denominatoribus nempe datarum fractionum, videlicet 6, communis sit denominator.

C	S		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

Demonstratio pendet ex axiomate sub numero 64. Nam fractionis C numeratorem, et denominatorem in eundem numerum 3 duximus: pariter duximus in eundem 2 tam numeratorem, quam denominatorem alterius fractionis S.

PROBLEMA III.

70. *Fractiones* S, V, C, L *ad idem nomen reducere*.

R. Ducantur inter se denominatores omnes, productum 90 sit communis denominator: primae fractionis numerator sit productum ejus numeratoris in omnes denominatores, suo excepto, et sic agatur pro caeteris inveniendis aliarum fractionum.

S	V	C	L	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	
$\frac{45}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{60}{90}$		$\frac{18}{90}$

D. Prae oculis patet, multiplicationem cujusvis fractionis tam numeratoris, quam denominatoris peractam fuisse in eosdem numeros; ideo fractionem sic ortam priori manere (64) aequalem, ejusdemque valoris necesse est. Q. E. F.

71. Coroll. I. Reductis igitur fractionibus ad idem nomen, colligitur quaenam ex iisdem major sit; major scilicet erit, quae majorem (57) habet numeratorem: hic enim plures partes tollendas ex eodem integro, per denominatorem diviso, exprimit.

72. Coroll. II. Patet pariter methodi

 ratio

ratio reducendi integros in fractiones *dati nominis*. Ex. gr. dati sint 3, 5 reducendi ad fractiones, quarum denominator sit 8. Dati 3, 5 considerari valent (55) veluti $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$, et 8 adinstar $\frac{0}{8}$, quae fractiones ad eandem denominationem reductae dant $\frac{24}{8} = 3$, et $\frac{40}{8} = 5$ (54).

PROBLEMA IV.

73. *Fractiones* V *et* C *addere*.

R. Reducantur datae fractiones (69) ad idem nomen in S. Numeratorum summae, ducta lineola, subscribatur communis denominator: dico factum in *L* fractionem exprimere datis parem.

$$V = \frac{1}{2} \quad C = \frac{3}{7} \quad L = \frac{13}{14}$$

$$\frac{7}{14} \; S \; \frac{6}{14}$$

D. Fractionum additio partium additio (52, 53) est: reduximus ad eandem denominationem datas fractiones, ut cujus essent partes elucesceret; quam proinde subscripsimus partium summae. Partes enim addendas demonstrant Numeratores; denominatores vero in quot partes divisum fuerit totum. Q. E. F.

PRO-

PROBLEMA V.

74. *Fractionem* S *ex* V *subtrahere*.

R. Fractiones datae reducantur (69) ad eandem denominationem in C et L, et ex fractionis L numeratore subducatur Numerator C, et residuo 8 subscribatur communis denominator; eritque A quaesitum residuum.

S	V	A
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{35}$

C	L
$\frac{7}{35}$	$\frac{15}{35}$

D. Ex partibus partes subduximus; sed ad hoc ut cujus partes essent dignosceretur, hoc est in quot partes dividi oporteret totum, subscripsimus communem denominatorem. Q. E. F.

75. Coroll. Si integri cum fractione subtrahendi sint ex aliis similibus, 1°. reducantur integri ad fractionem ejusdem denominatoris, quem habet annexum fractum, cui (55,69,73) ipsum addatur: 2°. ambae ortae fractiones (69) ad idem nomen reducantur, et pro reliquo procedatur, ut supra.

PRO-

PROBLEMA VI.

76. *Fractionem* L *in* I *multiplicare*.

R. Ducantur datarum fractionum tam denominatores 6 et 5 inter se, quam Numeratores 1 et 3; ex productis fiat relative fractio S, nempe illud ex 1 in 3 sit pro Numeratore, alterum vero ex 6 in 5 pro denominatore; dico factum.

$$L \;\; \frac{1}{6} \qquad I \;\; \frac{3}{5} \qquad S \;\; \frac{1\times 3 = 3}{6\times 5 = 30}$$

D. Cum dicitur: ducatur $\frac{1}{6}$ in $\frac{3}{5}$, quaeritur sexta pars fractionis $\frac{3}{5}$: hinc sexduplicando denominatorem 5, habetur sexta pars ipsius $\frac{3}{5}$. Q. E. F.

77. Coroll. I. Hac methodo dignoscitur valor alicujus minutiae, ex. gr. $\frac{2}{5} \mid \frac{1}{3}$: petitur enim tertia pars ipsius $\frac{2}{5}$.

78. Coroll. II. Si invicem multiplicandi sint integri cum fractionibus, reducantur integri ad fractionis annexae eandem denominationem (72), et simul respective addantur; quo peracto, agatur ut supra pro problematis resolutione: simplices enim fractiones in data quaestione manent.

PRO-

PROBLEMA VII.

79. *Fractionem* V *per* S *dividere*.

R. Fractiones datae ejusdem nominis fiant (70) in C et D. Scribatur fractio, cujus Numerator sit ille Dividendi D, denominator vero sit Numerator divisoris C, dico fractionem in L esse quotum, qui quaerebatur.

$$S\ \frac{1}{3}\quad V\ \frac{1}{2}\quad L\ \frac{3}{2}$$

$$C\ \frac{2}{6}\quad D\ \frac{3}{6}$$

D. Fractiones ejusdem denominatoris (58) sunt uti numeratores. Hinc si unum, cujus fractio erat dividenda, per alium dividamus, quidquid oritur, quotus erit (47) divisionis quaesitae. Q. E. F.

80. Coroll. Si occurrat dividere fractiones cum annexis integris, reductis his in fractiones, additisque sibi annexis, methodo supra descripta agatur.

CAPUT III.

De Radicum extractione .

DEFINITIONES.

81. R*Adicem quadratam* ex numero extrahere est invenire numerum, qui semel in se ductus datum restituat, vel ipsi proxime aequalem; hoc accidit, si numerus sit spurius, et non quadratus. Inventus numerus dicitur *Radix*: et si nil reliqui fuerit in dato, hic *Quadratus* denominatur.

82. *Radix cubica* est numerus, in cujus quadratum ille si ducatur, dato vel omnino parem, vel proxime restituit.

83. Radix quaevis exprimitur hoc signo $\sqrt{}$, quod *Radicale* vocatur. Inter hujus signi crura scribatur vel 2, vel 3 etc., si ex numero dato, subter dextero crure posito, extrahenda sit radix quadrata, vel cubica etc.

84. Numeros ita signatos 3^2, 4^3 etc. legimus quadratum ex 3, cubum ex 4 etc. Ex hac inscriptione ortum habuit denominatio: *Radix secunda*, *tertia* etc.

AXIO-

AXIOMATA.

85. * Idem est sumere duplum productum ex 2×3, ac sumere productum ex $2 \times 2 \times 3$.

86. * Pariter idem est agere $3 \times 6 \times 8$, ac sumere $3 \times 8 \times 6$: Nimirum quomodocumque ducantur inter se plures numeri, idem oriri debere pro producto per se patet.

THEOREMA I.

87. *Productum ex duobus numeris* 5 *et* 7 *aequale est productis simul additis ex eorum partibus invicem*.

D. Quae diximus de reiterata additione, scilicet de integrorum multiplicatione; eadem in memoriam reducantur. Partes numeri 7 sint 5 et 2, ac numeri 5 sint 3 et 2. Itaque si ter repetamus tum 5, tum 2, oritur idem ac si ter reiteremus 7; et sumere bis 5, et bis 2 idem est ac accipere bis 7; ideoque illis his additis, summa aequatur $35 = 5 \times 7$. Q. E. D.

88. Coroll. I. Radicis 5 quadratum habetur, si numero 5 in partes 3 et 2 reducto, primum fiat 3^2, deinde 2^2, tum 3×2, postremo 2×3. Ratio fa-

facillime intelligitur ex supradictis, supposita multiplicatione ex 5 in 5, peragenda ex partibus similibus ex utroque ortis, idest 3, 2; et 3, 2. Hinc *quadratum cujusvis numeri aequatur facto ex prima parte, et quadrato ex secunda, una cum duplo producto*, hoc est, *duplo rectangulo ex partibus*.

89. Coroll. II. Quadratum majus superat quodcumque minus, duplo producto ex differentia radicum ipsorum, in minoris radicem ducta, cum quadrato ex ipsorum differentia. Res exemplo fit clarior: Pro differentia invenienda inter 3^2, et 5^2 supponatur major num. 5 divisus in 3 et 2: ad ejus quadratum habendum fieri (88) debet 3^2 (illis, quae sequuntur, superatur datum quadratum minus, quia illud ex 3 jam habuimus), cum duplo rectangulo ex 2 in 3, hoc est ex differentia inter datos 3 et 5 in ipsum 3, sive rectangulo ex differentia (85) in duplum 3, et tandem quadrato ex eadem differentia 2.

Si differentia foret unitas, dictum consectarium ita proponi posset: *Quadratum ex minori superatur ex proxime majori, duplo minoris cum unitate*. Hinc si in Radicis extractione residuum ex dato numero majus sit duplo inventae radicis, haec minor est vera.

PRO-

PROBLEMA I.

90. *Ex numero A Radicem quadratam extrahere.*

R. Signetur numerus datus dextrorsum *in membra*, ut dicitur, singula duas notas continentia (ex hoc num. membrorum internoscitur quot notis

```
              A          S
       √3,49,69 = 187
 28 | 249
      224
      ———
367 | 2569
      2569
      ————
      -  -
```

constare debeat tota radix); non interest si extremum unam habeat notam 3; cujus 1°. sumatur radix proxime minor 1, quae ponatur in S; hujus notae quadratum 1 subtrahatur ex 3, residuum 2 ponatur sub ipso 3, cui adnectatur secunda nota 4.

2°. Ortus 24 dividatur per duplum radicis inventae, quotus 8 est secunda nota radicis in S, quae adnexa duplo radicis ex prima, habetur 28, in quem ipsa ducatur, et productum subtrahatur ex duabus notis supradictis cum alia ex secundo membro, nempe ex 249, attento numero 89 pro vera radicis nota, an scilicet major, vel minor vera sit.

3°.

3°. Residuo 25 adnectatur prima figura tertii membri, et totus dividatur per radicis inventae duplum, in quod una cum annexo sibi quoto 7, tertia radicis figura, ducatur idem 7, productum subtrahatur ex Dividendo, reliqua nota 9 dati numeri sibi adposita; et quia nihil remanet, datus numerus est quadratus, et ejus adaequata radix totus numerus S.

D. 1°. Dispescitur datus numerus dextrorsum in membra, singula duarum figurarum, ex eo quia unica multiplicatione cujusvis simplicis numeri, ad summum habetur productum duabus notis constans, et multiplicatione duarum notarum, saltem productum nascitur trium notarum, (43): ex. gr. radix numeri 349 esse nequit tantum 9, quia $9 \times 9 = 81$; contra primae notae 3 radix 1, hoc est 10 legitima erit; nam productum ex 10 in 10 non excedit tres figuras, quas habet 349; et sic de caeteris.

2°. Primi membri, demta radice, residuum cum secunda figura, et tertia insimul, continet (38) duplum rectanguli ex duabus notis inveniendae radicis, una cum quadrato ex altera figura: itaque si per duplum primae notae dividamus hunc compositum numerum, quotus erit altera figura radicis: ex. gr. nu-

numerus datus *A* aequatur (88) 18^2, nempe $180^2 + 2 \times 180 + 7^2$; ex ipso *A* demto 180^2, residuum 2569 in se continere debet $2 \times 180 + 7^2$; ergo, diviso 256 per 2×18 (49), quotus erit altera radicis nota.

Hujusmodi quotum aliquando majorem vero sumi posse accidit; ratio est, quia ipsemet Dividendus continere in se debet (88) interim ipsius quoti quadratum. Q. E. F.

PROBLEMA II.

91. *Ex numero L radicem quadratam extrahere.*

R. Inventa radice methodo praescripta, remanet 13: ponatur hujusmodi residuum supra lineolam, infra vero duplum totius inventae radicis, addita unitate; et hoc ut habeatur radix proximior verae, cum datus numerus L quadratus non sit.

$$\sqrt[2]{157} = 12\tfrac{13}{25}$$

(L = 157; residuum 13)

D. Diximus (89) quadratum majus superare proxime minus, duplo radicis minoris quadrati, unitate aucto; ideoque hujuscemodi differentiam infra lineolam posuimus, supra vero residuum ex ra-

dicis extractione ortum, quod denotat partes (56) ex ipso defectu minoris ad majorem. Q. E. F.

THEOREMA II.

92. *Cubus ex* 8 *aequalis est cubo ex ejus prima parte* 5, *addito triplo* 5^2 *in secundam partem* 3 *ducto, una cum triplo* $3^2 \times 5$, *et* 3^3.

D. Habetur cubus ex 8, si ejus partes 5, et 3 (82) ducantur in ipsius quadrati partes, nempe in 5^2, in duplum 5×3, et in 3^2. Primo habetur 5^3, $2 \times 5 \times 5 \times 3$, nempe (86, 81) $2 \times 3 \times 5^2$, et 5×3^2: secundo nascitur 3×5^2, $2 \times 5 \times 3 \times 3$, nempe (86, 81) $2 \times 3^2 \times 5$, et 3^3: quae omnia simul sumta pro clariori expressione dant 5^3, $3 \times 3 \times 5^2$ ($= 2 \times 3 \times 5^2 + 3 \times 5^2$), $3 \times 3^2 \times 5$ ($= 5 \times 3^2 + 2 \times 3^2 \times 5$), et 3^3. Q. E. D.

93. Coroll. I. Cubum ex minori radice superat cubus ex majori, 1°. triplo quadrato ex minori radice in differentiam inter utramque radicem ducto; insuper triplo ex eadem differentia quadrato in minorem ducto, una cum differentiae cubo. Nam si ex. gr. differentiam scire volumus inter 3^3 et 5^3, diviso 5 in 2 et 3; erit 5^3 ex ipsius partium

tium multiplicatione (82) aequalis ad 2^3, pro quo intelligere poterimus alterum cubum datum (quidquid sequitur ergo est id, quo 5^3 superat 2^3), cum triplo 2^2 in differentiam 3 ducto, et triplo 3^2 ex differentia orto.

Si inter datas radices differentia sit unitas, ita efferri potest antecedens consectarium: *Cubum ex minori radice superat cubus ex majori, 1° triplo quadrato ex prima, 2° triplo primae, una cum unitate.*

94. Coroll. II. Hinc si residuum in extractione radicis cubicae, majus sit triplo quadrato ex radice inventa, una cum triplo ejusdem, evidens est, erratum fuisse in sumenda radice.

PROBLEMA III.

95. *Ex numero A radicem cubicam extrahere.*

A

$$\sqrt[3]{3,375} = 15$$

3	2375
	750
	1625
	1500
	125
	125
	———

R. Dividatur numerus in membra, singula tres notas continentia, dextrorsum incipiendo, nullo habito respectu de extremo sinistrorsum residuo. Ex hoc membro sumatur radix cubica 1, residuum 2 ponatur sub 3, cui adnexa prima nota 4 alterius membri totus dividatur per triplum quadratum ex eadem 1, quotus 5 (toties enim (94) videtur contineri) est secunda radicis figura. Ex hoc Dividendo, sibi adnexis ceteris notis secundi membri, subtrahatur triplum radicis 1, ductum in 5^2, zero summae dextrorsum adposito, et ex residuo subtrahatur triplum 1^2, ductum in 5, duobus zeris pariter producto adnexis: tandem hoc residuum minuatur reliquo 5^3.

D. 1°. Dati numeri notae ternae sunt di-

stri-

stributae ob duplicem multiplicationem, qnam (82) pati debent radicis notae inveniendae , ut reddere possint non plures , quam tres numeros in producto , videlicet in cubo : multiplicando ex.gr. $9 \times 9 \times 9$, productum non plures , quam tres notas reddere valet.

2°. Zeri adnectuntur productis , quia in factoribus zeri supponuntur , quorum locum occupat radicis nota .

3°. Primum residuum cum alio membro (92) continet triplum radicis primae , in quadratum secundae ductum ; idcirco residuo primi membri cum alterius figura per idem triplum diviso , quotus est secunda radicis nota. Q. E. F.

PROBLEMA IV.

96. *Ex numero* B *radicem cubicam extrahere.*
R. Resolvatur datus B in membra, et

$$\overset{B}{\sqrt[3]{23{,}639{,}968}} = 287\tfrac{65}{247969}$$

```
          B
      ∛23,639,968 = 287 65/247969
2352 |  1687968
          41160
        -------
        1646808
        1646400
        -------
        — — 408
            343
          -----
             65
```

ex primis duobus inventa radice 28 methodo supradicta, remanet 1687, cui addita prima nota 9 tertii membri, dividatur totus per triplum quadratum ex 28, quotus 7 est tertia figura radicis. Hujusmodi residuum cum caeteris notis dati numeri B minuatur triplo ex 28 in 7^2 ducto, addito dextrorsum zero: ex hujus residuo subtrahatur triplum 28^2 ductum in 7, duobus zeris dextrorsum positis: tandem hoc residuum minuatur cubo ex 7; quod remanet ponatur supra li-

lineolam, subter vero triplum ex radice inventa quadratum, triplum radicis, et unitatem.

Demonstratio est eadem, ac supradicta. Pro fractionis autem appositae artificio intelligendo, in memoriam repetantur quae declarata fuere numero 93: denominator enim repraesentat partes deficientes ex cubo proxime majori; Numerator vero exprimit partes sumendas ex dictis, utpote residuum numeri spurii. Q. E. F.

ANIMADVERSIO.

97. Mirum non sit equidem, si ex numero spurio extracta radice, haec adaequata non oriatur: datus enim numerus cum habere nequeat radicem, nisi proxime aequalem, quia quadratus non est, eadem in se et fractionem, ut sit solummodo proximior, insuper contineat necesse est. At fractio in se ducta fractionem necessario (76) reddit. Ideoque si numerus datus, ex quo extrahenda sit radix, non est quadratus, dari nequit ejus radix accurata, videlicet absque residuo; quod cum fractionem constituat, dicendum firmiter est, ex ejus multiplicatione oriri fractum; consequenter in numero spurio radicem adaequatam nullo pacto reperiri posse.

APPENDIX.

De Decimalium fractionum Algorithmo.

DEFINITIONES.

98. *DEcimalis fractio* est quaedam fractionis species, quae pro denominatore unitatem cum zeris habet. Hujusmodi fractio, ut expeditior evadat, sine denominatore scribitur, dextrorsum positis super extrema numeratoris nota lineolis secundum numerum cyphrarum denominatoris: Vel secundum earundem numerum, dextrorsum incipiendo, posito puncto in Numeratore, zeris sinistrorsum additis, si opus, usquedum zerus extra punctum maneat, si integer numerus deficiat. Hinc pro decimali $\frac{25}{1000}$ scribitur 25‴, vel 0. 025.

99. Sub *Apicis* nomine veniunt lineolae supradictae super ultima fractionis nota perpendiculariter positae, vel punctum secundum eandem rationem positum.

100. Hujusmodi fractiones si pro una cyphra

phra Apicem habent, veluti 3′, vel 0.3, *tres decimi* per consequens leguntur; si duas, uti 15″, et 0.15, *quindecim centesimi*, et sic deinceps.

AXIOMA.

101. Fractio 25″ ejusdem valoris est, ac 250‴. Nam ex dictis $25'' = \frac{25}{100}$; hujus tam numeratorem, quam denominatorem si ducamus in 10, habemus fractionem $\frac{250}{1000} = \frac{25}{100}$ (64).

PROBLEMA I.

102. *Fractiones decimales* C, D, S *addere*.
R. Ita collocentur datae fractiones, ut puncta sint verticaliter in directum. Fiat additio eadem methodo numero 30 declarata, ejusque seriei punctum interponatur secundum caetera in datis posita, dico factum.

C	0. 2 5 5
D	0. 2 5
S	0. 3 2 1
	0. 8 2 6

Demonstratio pendet ex numeris 73, et 64; supposito zero dextrorsum fractioni D, utpote minoris apicis, firmo manente valore ejusdem, ex dicto Axiomate. Q. E. F.

103. Coroll. Aliquando accidit, apicem in summa dare sinistrorsum integrum ali-

aliquem, expressum ex nota extra punctum separata.

PROBLEMA II.

104. *Decimalem* M *ex* L *subtrahere*.

R. Dispositis seriebus, uti supra de additione, fiat subtractio minoris M ex majori L secundum numerum 74; ponaturque punctum eodem situ, ac in datis, in orta differentia X, dico factum.

L	0. 5 6 9
M	0. 3 2 9
X	0. 2 4 0

Demonstratio patet ex eodem numero 74; habent enim datae fractiones communem denominatorem ex apice expressum. Q. E. F.

105. COROLL. Si Subtrahendi apex minor sit illo Subtrahentis, zeris adjunctis, fiat aequalis ex repetito axiomate sub num. 101: ita ex. gr. de datis S, T, reductis ad C, O aequales, fiat subtractio, quae pro residuo dat L.

S	0. 4 6
T	0. 2 9 2
C	0. 4 6 0
O	0. 2 9 2
L	0. 1 6 8

106. NOTA. Pariter si integri sint cum fractionibus, procedatur eodem pacto, ac si fractiones quoque integri essent.

Hoc

Hoc etiam dictum sit pro Additione .

PROBLEMA III.

107. *Fractionem* S *in* C *ducere* .

R. Fiat multiplicatio secundum numerum 40 , et producto L utriusque apicis summa apponatur.

C	0. 3 7 5
S	0. 2 3
	1 1 2 5
	7 5 0
L	0. 0 8 6 2 5

D. Ratio aperte descendit ex numero 43 pro denominatoribus, et ex numero 76, consideratis veluti fractionibus . Q. E. F.

SCHOLION.

108. Pro divisione melius est uti methodis praescriptis numero 79 , et 80 . Si enim series Divisoris , et Dividendi tanquam integros consideramus , et divisionem peragimus , haec residuum praestabit, sub alia fractione exprimendum , quam in decimalibus admittere procul ab usu est prae nimia confusione . Haberetur enim minutiae minutia, et qua liberi sumus, si methodis praescriptis numero 79 , et 80 utimur .

Sit exemplum . Decimalis fractio 0. 693 di-

dividenda sit per 0.23. Primo divisor 0. 23, ob apicem non parem alteri 0. 693, dextrorsum zerum acquirat (101). Deinde fiat divisio secundum numerum 47; habetur pro quoto 3, et residuum 3: hoc sit numerator, denominator vero sit 230: quae fractio ita exprimi deberet $\frac{693}{1000} \mid \frac{3}{230}$. Haec operatio quantum sit implicata nemo non videt: Contra si utamur methodo sub dictis numeris, habetur $\frac{693}{230} = 3\frac{3}{230}$.

ARITHMETICAE

LIBER SECUNDUS.

De Proportionibus.

CAPUT PRIMUM.

De Regulis Arithmeticis.

DEFINITIONES.

1. RAtio est quaedam habitudo inter duas quantitates similes : ejus signum est : ; hinc habitudo numeri 3 ad 6 hujusmodi signo sic exprimitur 3 : 6 ; haec ratio 3 : 6 ut ostendatur se habere eandem habitudinem, ac altera 1 : 2, sic designatur, videlicet 3 : 6 = 1 : 2. In

In ratione primus terminus dicitur *antecedens*, *consequens* vero secundus.

2. Si antecedens suum consequens semel et iterum continet, habet ad hoc rationem illam, quae dicitur *dupla*; si ter, *tripla*; si quater continet, *quadrupla* etc. nuncupatur: Si è contrario continetur eodem gradu in consequente, *subdupla*, *subtripla* etc. nominatur.

3. Si antecedens comparatur consequenti, ratio nuncupatur *directa*; si autem antecedenti consequens, *inversa* vel *reciproca* appellari solet. Et quotus ex divisione illius per consequens ortus, *valor* rationis dicitur. Hinc patet *inversione* proportionales evadere duas rationes aequales: manet enim eadem habitudo inter terminos eosdem.

4. *Ratio duplicata*, vel *triplicata* etc. dicitur, si ejus antecedens sit ad consequens, uti quadratum ex alterius rationis antecedenti ad aliud ex consequenti; Sive uti cubus ad cubum etc.; et contra dicitur *subduplicata*, vel *subtriplicata* etc.

5. *Proportio* est rationum aequalitas: haec est continua, si consequens primae rationis est antecedens secundae etc.; si secus, *discreta* vocatur.

POSTULATUM.

6. Pro problemate solvendo sumere quemvis numerum, *aptum*, ut dicitur, ad idem solvendum.

AXIOMATA.

7. Ad habendum numerum sui vel *duplum*, vel *triplum* etc. sufficit datum ducere vel in 2, vel in 3 etc.: et si contra per hos dividatur, habetur *subduplus*, vel *subtriplus* etc.

8. Si proportionalibus addantur aeque proportionalia, orta erunt proportionalia.

PROBLEMA I.

9. *Datis tribus numeris* S, O, C *quartum directe proportionalem invenire*.

R. Dividatur (46) O per S, et quotus ducatur (39) in C; productum I est quartus terminus directe proportionalis.

S	O		C	I
3 :	6	=	5 :	10

D. Toties tertium terminum (1) debet continere quartus, quoties primum continet secundus: dividendo itaque secundum per primum, quotus 2 denotat semel et iterum primum contineri in se-

secundo, hoc est primum (7) subduplum esse secundi: ideoque tertius (5) subduplus esse debet quarti inveniendi; ad hunc habendum itaque opus tantum est C multiplicari (85, Lib. I.) in 2. Q. E. F.

10. Coroll. I. Si dentur tres numeri, scilicet primus, secundus, et quartus, tertius invenitur, qui eandem rationem habeat quarto, ac primus habet secundo, modo valor primae rationis (3) in quartum terminum ducatur, et productum pro quaesito ponatur: ex. gr. datis S, O, I, habetur pro resolutione $\frac{S}{O} \times I = C$.

11. Coroll. II. Si vero tres dentur termini, sed *inverse* (3) sit inveniendus quartus, habeatur tertius pro quarto, et agatur uti in antecedenti Corollario. Datorum enim 8 : 4, et 2 sit inveniendus tertius *inverse* proportionalis, dividatur 8 per 4, et quotus 2 ducatur in 2, habetur 4, qui se habet ad 2 uti 8 : 4.

SCHOLION.

12. * Defatigari Tirones solent in disquirendo, *directa* an *inversa* regula opus sit ad datum problema solvendum. Facil-

cillima vero res est. Regula directa (3) est, quando in geometrica progressione primus terminus se habet ad secundum, uti tertius ad quartum: ideoque si augetur primus terminus, crescit quoque secundus. Ergo pro regula generali: *Solvi debet data quaestio regula directa, si quoties ipsius primus terminus augetur, crescat quoque alter, hoc est consequens.* Ex. gr. Boves 4 trahunt lib. 100, boves 6 quot lib.? ex eo quia si augentur boves, crescit vis, pondusve majus trahunt, hujuscemodi problema regulam directam spectat.

13. * Regula inversa est in illis rationibus, in quibus antecedens unius rationis se habet ad suum consequentem, ut consequens alterius ad antecedentem suum. Ergo haec regula eas spectat quaestiones, quarum unius rationis antecedens si augetur, decrescit consequens. Ergo pro regula universali: *Uti licebit regula inversa ad problema solvendum, si quo rationis antecedens augetur, eo minui debeat consequens pro proportione servanda.* Ex. gr. homines 10 diebus 12 determinatum opus agunt; homines 12 quot diebus? notum Lippis quoque est, quo crescunt homines in numero, eo minui dies; ideoque etc.

PROBLEMA II.

14. *Datis quinque numeris* C , A , S , D , I *ita , ut primus* C *sit ejusdem speciei ac* D , *et* A *alterius* I , *sextum invenire proportionalem , ac ejusdem speciei , quam* S .

R. Ductis C in A , et D in I , oriuntur X et F ; fiat X : S = F ? in his tribus inveniatur quartus proportionalis (9) ratione directa , habetur L sextus quaesitus proportionalis .

C	A	S		D	I
2 :	3 :	8	=	6 :	5

X	S		F	L
6 :	8	=	30 :	40

D. Duo C et D habent eandem analogiam cum duobus A et I, utpote ejusdem speciei : ideoque illi demonstrant hos duplicari , triplicari etc. , hoc est semet in hos duci . Quibus ita resolutis , videlicet in duos terminos reductis, et pro secundo termino posito dato S , huic similis pro sexto termino habetur , quartum proportionalem inveniendo . Q. E. F.

PRO-

PROBLEMA III.

15. *Invenire simplici positione partes numeri S in ea ratione, ut prima sit subdupla secundae, et haec tertiae.*

R. Supponatur pro prima parte numerus I (6), qui dicitur *positio*, hic cum ejus duplo, et cum hujus duplo simul sumtis, habetur T; sed ut resolutio quaesiti oriretur, haberi debebat numerus S; ergo fiat T : I = S : V (9), inventus V erit prima pars.

T	I		S	V
56 :	8	=	105 :	15

D. Si tum ipsi I, tum invento V addatur duplum suimet, summae eodem modo proportionales (8) erunt ad T et S; ad quos etiam eadem ratione se habebunt quadrupla; ergo (8) uti haec ipsius I constituunt T, illa alius V dare debent S. Q. E. F.

SCHOLION I.

16. Praedicta methodo fas erit solvere hujusmodi quaestionem: Tres Mercatores in sortem posuerunt nummos 9; horum primus dedit 2, secundus posuit 3, et tertius praebuit 4. Soluta societate, inventum lucrum fuit nummorum

27 ; hoc ita partiri quaeritur in partes tres , ut proportionales sint praedictis nummis 2 , 3 , 4 .

Inveniantur quarti proportionales (9) in progressionibus 9 : 2 = 27 ? , 9 : 3 = 27 ?, et 9 : 4 = 27 ? habetur in prima numerus *6* pro lucri parte primo Mercatori debita : in secunda habetur 9 pro alterius lucro ; et tandem habetur in tertia numerus 12 pro lucro tertii Mercatoris .

17. Si vero tempora quoque apposita sint dissimilia , quibus in negotio singuli permanserunt , haec in partes , quas posuerunt , ducantur , et productis habitis pro primis terminis , agatur praescripta methodo . Hinc in antecedenti problemate , si primus Mercator in societate permanserit menses 8 , alter menses *6* , et tertius menses 4 ; pro 2 , 3 , 4 , positis productis ex 2 in 8 , ex 3 in *6* , ex 4 in 4 , et horum productorum summa 50 pro 9 , inventisque quartis (9) proportionalibus , habentur partes lucri 27 , nempe 8 $\frac{16}{25}$ pro primo Mercatore , 9 $\frac{18}{25}$ pro secundo , et pro tertio 8 $\frac{16}{25}$.

18. Dantur itidem quaestiones solvendae , quae quid extranei , et ad libitum appositum habent . Quo casu extraneum auferatur , tum ex datis numeris ,

ris, tum ex summa eorundem, et problema *simplici falsa positione* solvatur. Ex. gr. Inveniendus sit numerus, cui addito 2 (ad libitum), et huic summae alio 5, oriatur 48. Habetur itaque pro statu quaestionis A pro primo numero ignoto, pro altero habetur A+2, et pro tertio habetur A+2+5: ex 48 demtis notis appositis 2+2+5, residuum est 39 = 3 A. Supponatur A = 4, erit 3 A = 12: ergo fiat 12 : 4 = 39 : 13 (9), qui quaestionem solvet; nam 13+13+2+15+5=48.

SCHOLION II.

19. * Praedictae quaestiones, simplici positione resolutae, sola divisione peragi quoque possunt. Pro primo exemplo sub numero 15 relato, si numerus datus 105 dividatur per 7 (=1+2+4), quotus 15 prima pars erit dicti numeri S, qui quaerebatur.

20. Pariter solvitur problema sub numero 16 dato, si numerus 27 dividatur per 9 (= 2 + 3 + 4); quoto enim 3 ducto in 2, in 3, in 4, habemus 6, 9, 12 lucra proportionalia Mercatorum positionibus.

21. Tandem solvatur problema, cujus methodi vestigia sequendo caetera patent.

tent. Interrogatus Senex quot annos natus esset? respondit: Ex summa aetatis suae cum dimidio, quafta parte detracta, haberi annos 99. Aetas itaque est $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ex qua summa demta quarta ejus parte, residuum erit $\frac{9}{8}$ praecisa senis aetas cum ejus octava parte, utpote $\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$: Si ergo dividamus 99 per $\frac{9}{8}$, habetur 88 pro aetate. Nam ipsi addito dimidio 44, et ex summa 132 demto 33, remanet 99.

22. Si quaeratur numerus, cujus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, et $\frac{5}{6}$ semet superat in 40, fractionum fiat summa, habetur $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = 1\frac{2}{3}$; ergo $\frac{2}{3} = 40$. Numerus enim quaesitus una cum dato 40 est suimet $1 + \frac{2}{3}$, consequenter $1 = 60$ (9).

23. Tres juvenes A, B, C lucrati sunt aureos 47. B obtinuit aureos 5 supra A; et C tantundem, quantum B, et insuper 10, quaeritur lucrum singulorum? Data quaestio exprimi sic potest: $B = A + 5$, et $C = A + 5 + 10$. Auferantur extranei numeri $5 + 5 + 10$ ex lucro 47, residuum 27 dividatur per 3, erit quotus $9 = A$. Notum est enim, numerum 47, extraneis deminutum, continere tres A; ergo si per 3 dividitur $\overline{47 - 20}$, quotus 9 ipsi A aequatur.

PRO-

PROBLEMA IV.

24. *Furtum in corona Hieronis detegere.*

R. * Supponatur corona librarum 12, quae posita intra vas aqua plenum effundat ejusdem aquae lib. $7\frac{4}{5}$: aurum purum paris ponderis emittat aquae lib. $7\frac{1}{5}$, et itidem argenti puri aequalis massa, lib. $10\frac{4}{5}$. Totalis aquae effusiones, argenti nempe $10\frac{4}{5}$, et auri $7\frac{1}{5}$, differunt in $3\frac{3}{5}$. Hujusmodi numerus $3\frac{3}{5}$ dividatur per 12 massae libras, habetur partialis differentia pro singulis libris fractio $\frac{3}{10}$, per quam dividatur $\frac{3}{5} = 7\frac{4}{5} - 7\frac{1}{5}$, habetur 2, librae argenti mixti cum auro in corona.

D. Fractio $\frac{3}{10}$ est differentia aquae effusae ex libra argenti supra illam, quam auri libra emittit. Ergo differentia inter aquae quantitates, emissas ex massa coronae, et ex illa auri, hoc est $\frac{3}{5}$, toties continet $\frac{3}{10}$, quot libras argenti mixtas corona habet: ergo divisione argenti mixtio detegitur. Q. E. F.

25. Coroll. Si pro massis argenti, et auri puri ejusdem ponderis, ac corona, dentur massae duae, unius librae tertiae parti, singulae aequales etc., aquae

 quan-

quantitates, quae pro eisdem massis effluunt, tertiam librae partem exprimant in mixtione, et res eodem pacto expediatur. Differentia aquae effusionis inter hujusmodi massam argenti, et auri sit $\frac{1}{10}$; dividatur $\frac{1}{5}$ per $\frac{1}{10}$, habetur *6*, cujus tertia pars 2 exprimit libras argenti mixtas.

26. NOTA. Aquae effusio in corona adulterata necessario esse debet media inter illas, argenti et auri puri aequalis ponderis; alioquin quaestio solvi nequit, utpote impossibilis in existentia: ratio evidens est, quam explicari possit.

PRO-

PROBLEMA V.

27. *Conflanda sit massa* O *octo librarum ex mixtione quatuor metallorum, quorum primae speciei libra valeat* 2, *secundae valeat* 4, *tertiae* 10, *et quartae* 12 *ita tamen, ut fractiones, quae exprimunt partes sumendas ex* A, B, C, D *aequantur unitati.*

O 8	A 2	$-- \frac{1}{5}$
	B 4	$-- \frac{1}{6}$
	C 10	$-- \frac{1}{3}$
	D 12	$-- \frac{3}{10}$

R. * Fiat $D - A$, nempe $10 : 1 = 8 - 2 : \frac{3}{5}$, et (9) $10 - 4 : 1 = 8 - 4 : \frac{2}{3}$. Sumatur dimidium ortae $\frac{3}{5}$ ipsius D, ideoq; dimidium quoque ipsius $\frac{2}{5}$. alius A; tandem dimidium $\frac{2}{3}$ quantitatis C, et dimidium $\frac{1}{3}$ alius B; hinc $\frac{1}{5}A + \frac{1}{6}B + \frac{1}{3}C + \frac{3}{10}D = O$, et fractiones simul sumtae dant unitatem.

D. Ratio 1°. pendet ex numero 24: problema enim idem sonat, ac ibi expositum, et declaratum: imo iisdem verbis emitti poterat, nisi obstaculum in Nota declarandum obstitisset. 2°. Sumitur dimidium cujusque quantitatis, quatenus fractiones ipsae unitatem reddere tenentur: nam tum ambae quanti-

tates

tates A, D, tum B, C in ortis fractionibus (24) ipsam reddunt; ideoque dimidia cujusque sumenda sunt pro problematis solutione. Q. E. F.

28. COROLL. Problemata hujusmodi, omnia praescripta methodo solvenda sunt, et pro ratione numeri differentiarum fractiones minuantur. Itaque si tum A, tum B, tum C minor fuerit dato O, ita ut idem O comparetur 1°. ad A, et D; 2°. ad B et D; 3°. ad C et D; harum fractionum sumatur singularum tertia pars, quia ter habita fuit ratio, eidem D; ideoque pars quarta, si quater etc.

29. Pro clariori explicatione, supponatur alius numerus 13 subter D, cujus habeatur ratio ad O, uti quoque et A, et B, et C; sumatur singularum pars tertia, prout dictum fuit; et tandem medietates earundem, quae quaestionem solvunt.

30. NOTA. Advertendum est hujuscemodi problema *indeterminatum* esse; hoc est diversimode eaedem species datae sumi queunt in quantitate, ita ut et unitati aequentur, et interim problema solvant. Si sumatur enim $\frac{1}{9}$ primi A, $\frac{1}{9}$ secundi B, $\frac{1}{9}$ tertii C, et tandem $\frac{2}{3}$ extremi D, habetur $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+\frac{8}{9}+8=10$: Videlicet hujusmodi species, etsi in quan-

quantitate tam dissimiles superius inventis sint, tamen reddunt eundem 10; nimirum eandem quaestionem quoque solvunt partes datarum specierum, diversa quantitate sumtae.

PROBLEMA VI.

31. *Data sit massa ex auro, argento, et aere mixta; noto, auri quantitatem cum ipsa argenti esse lib.* 30, *argenti cum illa aeris lib.* 50, *tandem auri cum eadem aeris lib.* 40; *quaeritur singularum quantitas?*

R. * Supponatur 1°. auri quantitas esse lib. 1, erit ergo illa argenti lib. 29, et aeris lib. 21; hinc aurum cum aere lib. 22; ergo error in 18. Supponantur 2°. auri lib. 11, erunt argenti lib. 19, et aeris lib. 31; ergo auri et aeris lib. 42; ergo error in 2. Itaque regula aurea (9) 20 : 10 = 18 : 9, huic 9 addita prima positione 1, habetur 10 vera positio.

D. Regula aurea habita fuit in numeris 20, 10, et 18 positis pro terminis. Numerus 20 = 42 — 22, alter 10 = 11 — 1, et 18 = 40 — 22. Errores et positiones in una serie proportionales necessario esse debent erroribus et positionibus alterius seriei; ideo tribus ex his

his terminis cognitis, (9) quartus proportionalis problema solvere debet.

32. NOTA. Animadvertere hic fas sit, errare illos, qui hanc statuunt propositionem: *Ex falsis propositionibus erui veram*. Hallucinantur, inquam, quatenus vocant falsam solutionem, quae absolute vera est in se. Falsa est *mediate*, quatenus quaestionem non solvit; sed vera realiter, et absolute est, ita quidem, ut ejus vestigio inhaerentes problema solvamus. At loquimur in Arithmetica, non in Logica, ubi res diversimode se habet: Hic enim ex falsis praemissis vera aliquando ducitur consequentia.

CAP.

CAPUT II.

De Progressionibus Arithmeticis, et Geometricis.

DEFINITIONES.

33. PRogressio est plurium terminorum series eodem modo procedentium. Haec vel *Arithmetica*, vel *Geometrica* vocatur: Arithmetica est, si aequali excessu, vel defectu numeri progrediuntur, uti 2. 5. 8. 11 etc., quae dicitur *Ascendens*, sive uti 12. 10. 8 etc., et haec est *Descendens*.

34. Coroll. I. In ascendenti igitur arithmetica progressione secundus terminus continet primum, et unam differentiam; tertius primum in se habet, et duas differentias, et sic deinceps.

35. Coroll. II. Hinc si duobus numeris, differentiam 3 ex. gr. habentibus, addatur singulis quaevis nota, ortae summae habebunt pariter 3 etc. pro differentia.

36. *Geometrica progressio* est ea, cujus termini aequali ratione progrediuntur, quae-

quaeque *continua* nominatur, et ita designatur, ∺ 2 : 4 : 8 : 16 etc.; haec dicitur *ascendens* : vel e contrario, si a majori termino ad minorem eadem ratione descendit, veluti 12 : 6 : 3 etc., vocatur *descendens*.

37. *Denominator* hujus progressionis est (3) valor rationis, quo progreditur. Ex. gr. progressionis 2 : 4 : 8 etc. denominator est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

38. Coroll. Hinc in hujuscemodi progressione, si primus terminus in Descendenti sit duplus, triplus etc. secundi, etiam secundus erit duplus, triplus etc. tertii, et sic deinceps. Pariter e converso in ascendenti, primus si subduplus etc. secundi, etiam secundus subduplus etc. erit tertii : Ideo si progressio tribus terminis constat, erit primus ductus in extremum, aequalis quadrato ex medio : Et si quatuor, erit rectangulum ex extremis aequale facto ex mediis.

THEOREMA I.

39. *In Arithmetica progressione 2 . 4 . 6 summa extremorum 2 et 6 dupla medii 4 aequatur.*

D. Extremus terminus 6 continet medium, et differentiam (34) inter primum 2, et

et secundum 4; hoc est primum et differentias (34) duas. Deinde medius 4 habet in se 2, et differentiam unam; ergo ipsi 2 illum addendo, oritur duplum medii 4, videlicet erit $2 + 6 = 2 \times 4$. Q. E. D.

40. COROLL. I. Eodem ferme discursu procedatur in demonstrando, in quatuor numerorum progressione, primum cum quarto, sive extremos duobus mediis aequari. In progressione enim 2.4.6.8 quo quartus 8 superat 6, eo primus 2 superatur ex 4; ergo excessu posito, ubi aequalis defectus habetur, oriuntur aggregata aequalia.

41. COROLL. II. Hinc in quavis hujusmodi progressione, impari terminorum numero constante, duo extremi aequantur duplo medii. Manentibus enim primo, medio, et extremo termino, aliis intermediis demtis, hi tres in arithmetica progressione inveniuntur, ob demtum aequalem numerum terminorum, et differentiarum; ideoque etc.

42. COROLL. III. Cum in progressione pari numero terminorum constante, habeatur primus cum quarto aequalis secundo cum tertio; et in impari, termini aequaliter distantes e medio sint hujus duplum, evenit, duos terminos aequari duobus aliis aeque ab illis distan-

stantibus ; idcirco si ducamus summam extremorum in terminorum numeri dimidium , habemus summam omnium terminorum .

43. Coroll. IV. Si ex maximo subtrahatur minimus, residuum (34) differentias tot demonstrat , quot sunt termini uno deminuti : idcirco si illud per horum numerum dividamus, habemus pro quoto differentiam , qua termini progrediuntur .

44. Coroll. V. Itaque si differentiam ducimus in terminorum numerum , unitate minutum , et producto addamus primum , habemus *maximum* : E contrario si ex majori subtrahamus differentiam, in terminorum numerum uno deminutum , ductam, habemus *primum.*

45. Coroll. VI. Si ex maximo termino subtrahamus minorem , et residuum (nempe tot differentias (43) , unitate demta , quot sunt termini) dividamus per differentiam , et quoto addamus unitatem , habemus terminorum numerum .

46. Coroll. VII. Si ex maximo termino subtrahamus minimum , residuum dividamus per differentiam , et quoto addamus unitatem , summa notum facit locum , quem maximus occupat .

THEO-

THEOREMA II.

47. *Si duarum rationum antecedentes inter se, pariterque consequentes multiplicantur, producta praestant rationem eandem, nempe valorem eundem, ac ortus ex harum rationum valoribus inter se ductis.*

D. 1. Rationum ex. gr. 2 : 3, et 5 : 2 valores (3) sunt $\frac{2}{3}$, et $\frac{5}{2}$; horum producta (42) sunt $2\times5=10$, et $3\times2=6$, nempe producta insimul tum antecedentium, tum consequentium. Q. E. 1°. D.

D. 2. Sint aliae rationes 6 : 3, et 8 : 2 : singularum valores (3) sunt 2, et 4, idem (55. Lib. I.) ac $\frac{2}{1}$, et $\frac{4}{1}$: rationes ergo 2 : 1, et 4 : 1 eaedem sunt (64. ib.) ac datae 6 : 3, et 8 : 2; sed multiplicatio illarum est 2×4, et 1×1, nempe 8 : 1, scilicet 8; ergo valor duarum 6 : 3, et 8 : 2 oritur etiam ex 6×8, et 3×2, nimirum 48 : 6, videlicet (3) est idem 8. Q. E. 2°. D.

f THEO-

THEOREMA III.

48. *In progressione geometrica* 1 : 4 : 16 *ratio primi termini* 1 *ad extremum* 16 *est composita ex rationibus intermediis* 1 : 4, *et* 4 : 16.

D. * Hujusmodi compositio (47) in duarum rationum multiplicatione valorum consistit ; sed datae rationes sunt aequales ; ergo in quadrato unius valoris (81) : valor rationis 1 : 4 est $\frac{1}{4}$, cujus quadratum est $\frac{1}{16}$, nempe aequale valori rationis 1 : 16 ; ergo etc. . Q. E. D.

49. Coroll. I. Si plures sint termini seriei, eodem discursu asseritur, rationem primi ad extremum compositam ex omnibus intermediis esse.

50. Coroll. II. Ergo ratio primi ad extremum est (4) *duplicata* rationis primi ad secundum, si tres sint termini ; *triplicata*, si quatuor etc.

51. * Coroll. III. Datis duobus numeris, medios proportionales facile inveniemus ; si nempe extrahatur (90) radix quadrata ex datorum denominatore (37), *medius* sortitur : *duo medii* habentur, si cubica (95) . Hujuscemodi enim radices denominatores sunt rationis . En exempla . Pro primo : inveniendus sit *medius proportionalis* inter 1 et 4 ; valor

ra-

rationis 1 : 4 est $\frac{1}{4}$, hujus radix quadrata est $\frac{1}{2}$; sed valor rationis 1:2 = $\frac{1}{2}$; ergo numerus 2 est quaesitus *medius* ; Deinde duo medii sint investigandi inter 1 et 8 ; radix cubica ex $\frac{1}{8}$, valore rationis 1 : 8 , est $\frac{1}{2}$, ideoque valor rationum pro mediis inveniendis erit $\frac{1}{2}$. Simili modo quoscunque inveniemus terminos medios proportionales , si caeterarum radicum extractionis methodis utamur .

THEOREMA IV.

52. *In geometrica progressione ascendenti est summa omnium terminorum , minus extremo , ad eandem minus primo , uti hic ad secundum .*

D. Progressio sit 1 : 2 : 4 : 8 : 16 , dico $1 + 2 + 4 + 8 : 2 + 4 + 8 + 16 = 1:2$. Facile est id comprehendere , si totidem rationes intelligantur in ipsa serie, videlicet 1 : 2 , 2 : 4 , 4 : 8 , 8 : 16 , quarum primo termino additi fuere omnes antecedentes , et secundo omnes consequentes ; qua de causa hae summae eandem rationem (8) habere debent , ac unica ratio . Q. E. D.

THEOREMA V.

53. *Progressionis geometricae terminorum summa se habet ad extremum minus primo, uti primus ad secundum minus primo.*

D. Ex antecedenti est $1+2+4+8 : 2+4+8+16 = 1:2$, sive (3) $2+4+8+16 : 1+2+4+8 = 2:1$; demtis aeque proportionalibus, oritur $2+4+8+16 - 1+2+4+8 : 1+2+4+8 = 2-1:1$; demtis pariter terminis paribus, oritur $16-1 : 1+2+4+8 = 2-1 : 1$. Q. E. D.

CAP.

CAPUT III.

De Chronologia.

DEFINITIONES.

54. SUb nomine *Periodi*, vel *Cycli* idem venit, hoc est quorundam annorum numerus. In Cyclo Solari hic numerus est annorum 28, quibus elapsis, Litterae Dominicales eodem ordine iterum procedunt. In *Lunari*, dicto *Aureo numero*, est annorum 19, quibus transactis, Novilunia in eundem mensem, et diem incidunt. Dictus fuit *aureus numerus*, ex eo quod in Foro Athenarum quotannis designabatur hujusmodi Cyclus litteris auro fusis. *Indictionis* periodus constat annis 15. Indictio est series annorum arbitraria, ita quidem, ut *Romana* primordium habeat Kal. Jan., et *Graeca* Kalendis Septembris.

55. COROLL. Hujusmodi Cyclorum annus tertius, quartus etc. facile innotescit in dato anno post Christi ortum, si da-

datus numerus annorum dividatur per respectivos Cyclos; quotus enim Cycli annum praestat. Adnotandum vero, annum salutis initium duxisse anno *decimo Periodi Solaris*, ideoque numerus 9 ante divisionem addatur dato anno, cujus Cyclus Solaris quaeritur. Anno 2 fuit *Periodi Lunaris* initium, qua de causa Dividendo addatur 1; et *Indictionis* initium anno 4, proinde addatur 3, si haec invenienda sit; residuum enim annum Cycli demonstrat.

56. In anno Romano duplex correctio accessit. Primam emisit Dictator Julius Caesar, ob id dictus *Julianus annus*: cognovit enim Dictator, Solem percurrere Ecclypticam semel et iterum diebus 365, et hor. 6. Hinc ortum habuit annus *Bissextilis*, nimirum annus dierum 366 singulis quadrienniis.

57. Coroll. Si datum Reparationis annum dividamus per 4, residuum patefacit annos intervalli inter datum, et antecedentem Bissextilem.

58. Alteram emendationem praestitit Gregorius XIII anno 1582. Subduxit enim dies *decem* in anno Juliano currente, et statuit, in posterum tres primos centesimos post 1600 communes esse, non bissextiles, quartum saeculum vero Bis-

Bissextile, contra regulam Julii, qui omnes bissextiles decrevit. Haec correctio peracta fuit, quatenus nempe annuus Solis cursus, non diebus 365, hor. 6 perficitur, sed intervallo dierum 365, hor. 6, minutis detractis, uti apud Astronomos celebriores illius saeculi cognitum fuit.

59. Coroll. Ex hoc patet, annum Julianum post annum 1600 minutum fuisse ex Gregoriano diebus 10, post 1700 diebus 11, post 1800 eosdem differre diebus 12 inter se, et post 1900, et 2000 diebus 13, et sic deinceps.

60. *Epacta* est differentia dierum 11 inter annum lunarem dierum 354, et annum solarem dierum 365.

61. Coroll. I. Ergo Epacta est zerus in primo anno aurei numeri: altero anno enim incipiunt ipsi dies 11, differentia supradicta pro Epacta declaranda.

62. Coroll. II. Dati anni habetur Epacta, si in ejus aureum numerum ducatur differentia 11, et productum diebus 11 deminutum pro primo anno Epactam non habente, dividatur per 30 Lunationem Embolismicam, residuum erit *Epacta*.

63. Coroll. III. Ergo dies Lunae inveniemus, si summam habeamus ex Epa-

cta (haec apud Astronomos incipit Martii mense) , ex diebus Mensis , et ex numero mensium a Martio ad datum inclusive , et ex ipsa subtrahamus numerum 30 , *lunationem* nempe :

AL-

ALGEBRAE

CAPUT PRIMUM.

De primis Operationibus in quantitatibus simplicibus.

DEFINITIONES.

1. *ALgebra*, sive *Arithmetica Universalis* est Scientia, quae pro quaestionibus resolvendis Alphabeti litteris utitur. Haec Scientia sua analysi tum Arithmetica, tum Geometrica solvit problemata, et Theoremata demonstrat, uti alibi dictum fuit.
2. Quantitates sub Alphabeti characteribus exprimuntur. Ipsae dicuntur *positivae*, si signo affirmativo + litterae preditae sunt

sunt. Signum autem Subtractionis $-$ quantitati adnexum facit ipsam *negativam*. Sic designatur negativa quantitas $-bc-sl$, et ita *positiva* $+bc+ds$; hujusmodi signum affirmativum abstinemus ante quantitatem figere, ubi tamen subintelligitur.

3. Si ante istiusmodi characteres, nullo interposito signo, numerus sit, hic *coefficiens* nominatur; veluti sunt notae 3 et 2 in quantitatibus $3b$, et $-2c$.

4. *Monomiae*, vel *simplices* quantitates nuncupantur, nullum si habent signum intermedium: si contra *compositae* vel *polynomiae* vocantur. *Simplex* quantitas est $3b$, quae idem sonat, ac additio $b+b+b$; *composita* est $c+d-n$.

5. Quantitates illae sunt *similes*, quae easdem litteras, et numero aequales continent, nullo habito respectu ad coefficientes, et signa, si fuerint: tales sunt $-bc$, et $3bc$. Si contra, vocantur *dissimiles*, uti sunt $-cn$ et $-ilo$.

6. *Binomium* est quantitas composita ex duabus simplicibus, signo ideoque interposito. *Trinomium* dicitur, si ex tribus componatur, uti est $-cd+2no-s$.

PRAE-

PRAECEPTUM I.

Pro quantitatum Additione.

7. Si hujusmodi quantitates dissimiles fuerint, pro additione habeatur series, ex datis omnibus composita, signo Additionis interposito. Hinc addamus b, et c sic $b + c$; et cd, $2no$, et $ds - ln$ tali pacto $cd + 2no + ds - ln$.

Si similes fuerint, uni ex similibus quantitatibus secundum earundem numerum coefficiens assignetur (3), etiamsi quantitates addendae negativae sint; quo casu vero antecedenter ponatur signum negativum: ex. gr. $a + a = 2a$, et $- c - c = - 2c$. Tali pacto procedatur vero, si omnes quantitates sint vel affirmativae, vel negativae; si fuerint autem partim *negativae*, partim *affirmativae*, respective coefficiens efficiatur: itaque pro summa ex $2ab$, $- ab$, $- 5ab$, et $+ ab$, habetur $3ab - 6ab$.

Coefficientes similium quantitatum addantur, una apposita ex datis quantitatibus: hinc habetur $2a + 3a = 5a$, et $- 3a - 2a = - 5a$.

8. Coroll. Pro quantitatum *Reductione* ad pauciores terminos, si similes sunt, haec

haec Additionis operatio valeat, una cum sequenti Subtractionis, modo eadem opus sit.

PRAECEPTUM II.

Pro Subtractione.

9. 1°. Subtractio in quantitatibus similibus (5) tantummodo agit. In dissimilibus rem peragant signa.

In Subtrahente signa omnia permutanda sunt in dissimilia: quo peracto, interposito Subtractionis signo, Minuens Minuendo adnectatur: Uti si ex ab subtrahendum sit binomium $s - x$, pro differentia scribitur $ab - s + x$.

Hic animadvertendum est, signorum rationem spectare totam seriem: in antecedenti exemplo quantitas $+ x$ non refertur ad s, sed ad ab. Quoniam enim ex ab subtrahere debemus quantitatem s, alia x deminutam, opus fuit signum positivum interponere inter s et x, cum idem atque unum sit, ex ab subtrahere s, alia x deminutam, ac ipsi ab addere x, et ex integra summa subtrahere totam s. Alio exemplo res magis patet. Ex aa subtrahere oporteat binomium $a - a$; ex dictis habetur $aa - a + a$, hoc est habetur aa pro re-

residuo, ut ita loquar: nam $a - a$ idem est ac zerus.

2°. Quantitates ergo similes sine coefficientibus, signorum mutatione in Minuente se destruunt. Si habuerint coefficientes, hi si aequales sunt, una cum quantitatibus se destruunt; si inaequales, residuum cum quantitate simili, et majoris signo adposito, problema solvit: hinc $-4sx + 3sx = -sx$, derelicta unitate pro coefficiente, quae in omnibus quantitatibus subintelligitur.

D. 1°. Signa mutantur in Minuente, ut pateat, primam quantitatem ex Minuendo tollendam esse, auctam vero aliis sequentibus quantitatibus, si signa sunt positiva; et si negativa, illis deminutam. Si ex. gr. ex $2a - 2b$ subtrahi oporteat binomium $a + 2b$, idem est ac binomium $2a - 2b$ minui alio composito ex a, et insuper $2b$; ideoque sic reducere fas erit: $2a - 2b - a - 2b = a - 4b$. In Minuente enim sic redacto dignoscitur, non unam quantitatem, sed omnes subtrahendas esse ex Minuendo dato. Ideoque differentia inter bc, et $-s$ est $bc + s$: nam ex bc subtrahere negativam quantitatem s idem est, ac ipsi addere eandem s. Q. E. 1°. D.

D. 2°. De coefficientium operatione res pa-

patet ex natura eorundem; quoniam ex. gr. binomium $-4sx+3sx$ idem est, ac (4) $-sx-sx-sx-sx$, et $+sx+sx+sx$; ergo praescripta methodo recte problema resolvitur.

10. Coroll. Ex dictis eruitur, inter quantitates signo negativo affectas, differentiam quaeri, non proprie subtractionem consequentis quantitatis ex antecedenti (8): in dato binomio $6cd-8cd$ differentia est $-2cd$.

PRAECEPTUM III.

Pro Multiplicatione.

11. Diversimode describatur productum algebraicum, ac arithmeticum: hoc enim a dextera ad laevam notatur ob arabicas notas, quibus Arithmetica utitur, quas sic designare in usu est. Contra Algebra, quae cum Alphabeti litteris utatur, harum vestigia sequi Majores nostri ad rem existimarunt:

Signum ad hujus operationis indicium hoc $\times$ esse in Arithmetica diximus: Sed si quantitates multiplicandae complexae fuerint, linea verticali in factoribus superposita insuper designantur. En exemplum: $\overline{2ab-c}\times\overline{d-s}$. Haec descriptio denotat quantitatem $2ab$, alia c de-

deminutam, ducendam esse in quantitatem d, ipsa s minutam. Hujusmodi signo vero in *simplicibus* quantitatibus opus non est; sufficit enim alteram prope alteram scribere. Data sit quantitas a multiplicanda in b, vel in a; sat est scribere ab, vel aa. Neque tandem hujusmodi linea, neque signo opus erit, si veluti parenthesi utamur: ex. gr. supradicti factores ita exprimi pariter possunt, nempe $(2ab - c)\,\overline{d - s}$, sive $(2ab - c)\,(d - s)$.

1°. Eadem signa positivum, diversa negativum producunt. Sit itaque ducenda quantitas $-a$ in $-b$, oritur ab pro producto; vel $-s$ in c, habetur $-cs$. Hinc in multiplicandis compositis quantitatibus, generaliter, uti dictum hucusque fuit, agatur, et characteres ad Alphabeti normam procedant; ita prima Multiplicantis quantitas in primam, secundam etc. Multiplicandi ducatur; sic pariter de altera agatur, ut res in exemplo patet.

$$\begin{array}{r} a + cs + b \\ d - l \\ \hline ad + cds + bd \\ -al - ds - bl \end{array}$$

2°. Si coefficientes adsunt quantitatibus adnexi, pariter multiplicentur, et productum quantitatibus adnectatur.

D.

D. 1°. * Negativum signum in itidem negativum ductum, positivum profert ex eo, quod negatum negando contrarium affirmare notum sit: fas itaque est scribere $-a \times -c = ac$.

* Ideoque si unum sit negativum, affirmativum habeat altera quantitas; hujuscemodi quantitatum productum negativo affici debere clarum est; negatum enim asseritur, et affirmatur. Si ducere ex. gr. velimus -5 in 3, quaeritur quantitatem negativam 5 triplicare, hoc est productum -15.

2°. * Coefficientes multiplicantur. Multiplicatio illud exprimit, toties scilicet Multiplicandum sumi, quoties coefficiens in multiplicante positus demonstrat. Hoc ut magis elucescat, per partes multiplicationem peragere liceat: itaque pro $3a \times 2b$, sumantur producta ex $3a \times b$, et ex $3a \times b$; habetur pro primo quantitas $3ab$, et itidem pro secundo eadem $3ab$, quae simul sumtae dant $6ab$.

PRAE-

PRAECEPTUM IV.

Pro Divisione.

12. Divisionis signum duo sunt puncta, inter Divisorem, et Dividendum posita, uti $s : ac$; vel lineola verticalis, super qua Dividendus, subter vero Divisor jacet, uti $\frac{ac}{s}$; quibus in expressionibus denotatur, quantitatem ac dividi debere per aliam s.

1°. Eadem signa, tum ambo positiva, tum negativa dant positivum $+$; diversa vero negativum $-$.

2°. Vis divisionis in similium quantitatum delectu tum in Divisore, tum in Dividendo tota consistit, ita quidem, ut pro quoto satis sit ponere dissimiles tantum quantitates, et his praeponere coefficientium quotum, modo sint: ita $2a : 6ab = 3b$, et $\frac{aa}{2aa} = \frac{1}{2}$, cum semper unitas pro coefficiente in quantitate, ubi deest, intelligatur; ideoque divisione facta quantitatis c per c; oritur 1 pro quoto. Hinc si inter Divisorem, et Dividendum dissimiles omnes extant quantitates impossibilis est divisio inter eas; eo casu signum rem demonstret.

Si Divisor sit binomium, trinomium etc., unumquodque ex membris in Divisore sumatur, et pro divisore habito secundum praescriptos canones prosequatur operatio: tandem productum ex orto quoto in totum polynomium Divisorem ex Dividendo subtrahatur (9). In hoc exemplo polynomii membrum $2a$ totam peragit divisionem, et pro quoto complexa quantitas R oritur.

$$
\begin{array}{llll}
2a + ds : 2ac + cds - 2ads - 2ddss \\
\quad - 2ac - cds & 2ads & ddss \\
\hline
\quad 0 \quad 0 & 0 & ddss
\end{array}
$$

R

$$c - ds + \frac{ddss}{2a + ds}$$

D. 1°. Similia signa positivum, dissimilia negativum afferunt. Quoties enim quantitatem negativam in pariter negativam contineri scire cupimus, continentiam quaerimus affirmative. E contrario si signa sint dissimilia, negativo debet affici quotus, quia divisorem exprimitur contineri in quantitate, quae revera non extat.

2°. In divisione continentia quantitatis in quantitatem perquiritur, quae non-

nisi

nisi in similibus patet quantitatibus, ideoque, proprie loquendo, haec operatio inter similes quantitates agit: qua de causa aliquando pro quoto nota dissimilis solummodo notatur.

13. Adnotare hic operae pretium est, aliquando evenire, quod divisio peragi non possit ob defectum dictarum quantitatum similium. Hoc casu *Dividendo* apponantur quot notae videntur opportunae, quaeque similes sint iisdem *Divisoris*, sed sub dissimilibus signis positae, ad hoc ut hujusmodi adjunctio nihil officiat operationi. Pro exemplo: Sit dividendum binomium $ss + xx$ per $s - x$; sic manentibus quantitatibus, divisio nulla haberetur: *Dividendo* itaque adjungatur binomium $sx - sx$, ortumq; polynomium $ss + xx + sx - sx$ per $s - x$ divisum, pro quoto dat $s - x$, qui diversimode haberi non potuisset.

CAPUT II.

De iisdem operationibus pro Potestatibus.

14. *Potestas* est potentia, quam exprimit in se quantitas. Haec vocatur *prima*, quam in se quaevis quantitas habet; vel *secunda*, si demonstrat productum in semetipsam; vel *tertia*, si secundam potestatem in primam ductam denotat, et sic deinceps. Hujusmodi potestates *gradus* quoque nominantur, ideoque *gradus primus*, *secundus* etc. etiam vocantur.

15. Potestates apicibus exprimuntur, qui *Exponentes* nominantur: tales sunt numeri naturales 1, 2, 3, etc. Quapropter ad exprimendam potestatem *secundam*, *tertiam* etc. quantitatis c, scribitur c^2, c^3 etc., nulla facta mentione de *prima*, quam quaelibet in se claudit quantitas.

16. Coroll. I. Si data potestas elevanda sit ad secundum, tertium gradum etc., sat est exponentem ducere in 2, 3 etc., et pro exponente productum datae potestati adnectere: Sic secunda potestas quantitatis a^2 est a^4, et alius $3\,a^3$ est

$3a^6$; et ipsius $3a^3$ quarta potestas, sive ad quartum gradum elevatio est $3a^{12}$. Quodque dictum sit pariter pro indeterminatis generaliter: Si enim c^m elevanda sit ad dignitatem n, scribitur c^{mn}.

17. Coroll. II. Hinc hujusmodi potestatis elevationem ita exprimere licet, nempe $a^{2\times 2}$, $3a^{3\times 3}$, et $3a^{m\times n}$.

18. Coroll. III. Pro aa^2, bbb etc. notare poterimus a^3, vel b^3 etc.: idem est (11) enim a^3, ac $a\times a^2$.

19. Coroll. IV. Quantitas $\overline{3abc}^2$ demonstrat, atque denotat elevationem ad secundum gradum producti orti ex $3\times a\times b\times c$. Ceterum $\overline{c-s}^3$ designat elevationem ad tertiam potestatem differentiae inter c et s.

PRAECEPTUM I, et II.

Pro Additione, et Subtractione.

20. Tum *additio*, tum *subtractio* in quantitatibus similibus (7, 9) subsistere tantum potest, quaeque sint *ejusdem gradus*. Fit additio quantitatum ejusdem potestatis, si communi quantitati pro coefficiente apponatur numerus exprimens datarum quantitatum vices. Hinc si addendae sint quantitates duae, coefficiens summae sit 2; si tres datae fuerint, communi quantitati apponatur 3 etc. Pro exemplo: summa harum quantitatum $a^2 + a^2 + a^2 = 3\, a^2$.

21. *Pro Subtractione*. Ex majori coefficiente subtrahatur minor, differentia cum quantitate, coefficiente simili praedita, erit residuum. Si quantitates coefficientes non habuerint, vel aequales iidem fuerint, residuum est zerus. Pro primo exemplo, erit $a^2 - 2\, a^2 = a^2$; et pro secundo, erit $a^2 - a^2 = 0$.

Demonstrationes per se patent.

PRAECEPTUM III., et IV.

Pro Multiplicatione, et Divisione.

22. Quantitatum multiplicandarum similium exponentes addantur, et summa uni ex datis quantitatibus exponens sit, ductis inter se coefficientibus: ex. gr. multiplicandum sit binomium $5a^2 + ab^3$ in $-3a^3$, pro producto habetur $-15a^5 - 3a^4b^3$.

D. Multiplicatio in Factorum unione consistere diximus (11). Exponentes numerum quantitatum multiplicandarum demonstrant (18); ergo eosdem addendo, multiplicatio peragitur. Q. E. D.

23. *Pro Divisione*. In quantitatibus similibus ex Dividendi exponente ille Divisoris subtrahatur, et communi quantitati differentia pro exponente praefigatur; igitur $\frac{2b^5}{b^2} = 2b^3$. Si coefficiens sit, oritur $\frac{8c^6}{2c^2} = 4c^4$; coefficiens enim Dividendi per illud Divisoris dividatur.

D. Divisione nil agitur aliud, nisi divisorem (12) ex Dividendo tollere; hinc recte differentia exponentium quoto apponitur pro exponente. Q. E. D.

CAP. III.

De Fractionibus.

24. Fractio in Algebra eodem modo scribitur, ac in Arithmetica; ideoque $\frac{ab}{cds}$, et $\frac{a^2}{3}$ *fractiones analyticae* sunt, et denotatur ab dividi per cds, et a^2 per 3.

25. Fractionum operationes in Analysi iisdem peragantur methodis, ac praestitimus in Arithmetica: ita ad unguem, ut si quantitas data ad fractionem, ut ita loquar, reducenda sit, pro denominatore unitas (Lib. I. 55) subscribatur: Rationes interim supra declaratae prae oculis habeantur.

26. Ad majorem rei explicationem sint exempla. Primo pro reducenda fractione ad minorem expressionem. Fractio $\frac{3as-d}{15as-5d+3}$ ad minimos terminos sit reducenda. Dividatur methodo (12) praescripta denominator per numeratorem, et hunc per residuum, habetur

pro

pro communi mensura numerus 8, per quem diviso tum Numeratore, tum denominatore, oritur datae aequalis fractio $\frac{as - \frac{1}{3}d}{5as - \frac{5}{3}d + 1}$ ad minorem redacta expressionem. Itidem pro alia fractione $\frac{3ab - d}{15ab - 5d}$, divisore communi invento $3ab - d$, habetur aequalis simplicior $\frac{1}{5}$, divisione tum numeratoris, tum denominatoris peracta.

27. Ceterum si quantitas, vel numerus cernitur, qui adamussim absque residuo dividat quantitates, vel coefficientes in data fractione, pro communi mensura eo uti possumus. Proinde quia per 3 dividi exacte potest tum Numerator, cum Denominator fractionis $\frac{9b^2 + 12s}{15a - 3b - 6}$, peractis divisionibus, habetur aequalis $\frac{3b^2 + 4s}{5a - b - 2}$

C A P. IV.

De Radicum Extractione.

28. PRaescripta in vulgari Arithmetica pro Radicum extractione, eadem adamussim hic tenenda pro quantitatibus.

29. Ideoque si extractio non procedit ob spuriam quantitatem, utimur ad eam exprimendam radicali signo $\sqrt{}$, inter cujus crura ponatur numerus (15), qui potentiam exponat. Haec si fuerit secundi gradus, ipso numero abstineri possumus.

P R A E C E P T U M.

30. *Cujusvis potentiae radicem invenire.*

R. 1°. Exponens potentiae datae per illud, ad cujus potestatem reduci quaeritur, dividatur, et quoto pro exponente quantitati apposito, oritur quaesita radix. Exemplum sit in $\sqrt[m]{\overline{ca}^6}$, cujus si quadrata radix optatur, haec est $\overline{ca}^3$; si cubica quaeratur, oritur $\overline{ca}^2$. Pariter si

si data sit indefinita, ex. gr. $\sqrt[m]{x^n}$, habetur $x^{\frac{n}{m}}$.

D. * Ratio hujuscemodi resolutionis clare descendit ex multiplicationis genesi (16). Equidem vero ducendo ex. gr. aa in semetipsam idem productum sortitur, ac si fieret $a \times a \times a \times a = aaaa = a^4$ (18); ergo $\sqrt[2]{a^4} = aa = a^2$. Pariter quia $aa \times aa = a^4$, et $a^4 \times aa = a^6$, haberi debet radix $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, diviso exponente 6 per 3 potestatem cubicae rationis secundum dicta superius.

R. 2°. Si quantitati coefficiens sit, cujus radix haberi potest, haec pro coefficiente radici, nempe quantitati, apponatur: ex. gr. datae $4a^6$ radix secunda est $2a^3$; facta enim hujus multiplicatione in semetipsam $2a^3 \times 2a^3$, habetur $4a^6$ (22). Q. E. F. et D.

R. 3°. Ex potestate data aliquando radix extrahi nequit; quo casu duplicetur etc. quantitas data, et unitate etc. minuatur exponens, usquedum nimirum exponens extractionis capax reddatur: Ex. gr. radix cubica extrahenda sit ex a^7; ex dictis haec reducatur ad aequalem aa^6, cujus quaesita radix erit aa^2: hujus enim cubus est a^7 (22), et demonstratio patet ex numero 18. Q. E. F. et D.

31. Coroll. Eadem methodo agendum est, si radices extrahendae sint ex composita quantitate, quae plures, et dissimiles habeat gradus. Invenienda sit radix secunda ex y^8z^4, habetur y^4z^2.

C A P. V.

De Aequationibus .

DEFINITIONES.

32. *AEquationem* constituunt duae quantitates , aequalitatis signum intermedium habentes : hinc aequatio est $c = s$; pariter et $l m^2 = y$. Haec nuncupatur *Simplex* , si exponente caret ; et contra , dicitur *quadrata* , *cubica* etc. , vel *secundi* , *tertii gradus* etc. , si exponente praedita sit .

33. Aequatio dicitur *finalis*, si ad solvendam quaestionem apta fuerit .

34. Aequatio continere dicitur problema *indeterminatum* , si plures obtinere potest , et dissimiles solutiones . Ex. gr. data aequatione $3a + 2c = 4l$, problema extemplo solvitur, si supponatur $l = 2$, et $a = 2$, $c = 1$, tum $c = 1\frac{3}{4}$, et $a = 1\frac{1}{2}$, ubi videre est , aequationem datam plures praestare posse solutiones, quin eadem detrimentum patiatur . Si vero unam solummodo solutionem habere

re potest, problema erit *determinatum*.

POSTULATUM.

35. Ad exprimendas ignotas quantitates, liceat uti litteris k, m, n, etc., et reliquis a, b, c, etc. ad cognitas notandas. Videlicet sub y, z etc. exprimere non debemus notas quantitates 10, 20 etc.; contra sub a, b etc. has significare liceat.

AXIOMATA.

36. Pro quavis quantitate in aequatione ipsi aequalem substituere licet.

37. Cum aequalitatis signum designet quantitates in utroque membro aequales, hinc aut sumantur singulorum radices, fiantve ex eis quadrata, cubi ec., easdem in aequatione remanere perspicuum est.

38. Si utrique aequationis membro addatur, vel subtrahatur eadem, vel aequalis quantitas, seu in ipsam multiplicetur, aut per ipsam dividatur, aequatio manet eadem.

CA-

CANONES GENERALES

39. Quaestio solvenda, ut in expressionibus admixtum quid noti cum ignoto habeat, necesse est; alioquin problema dicatur *indissolubile*.

40. Datum problema, tamquam solutum scribatur, ope litterarum (35) quantitates datas signando, ea, quae melius apta videtur, methodo. Haec operatio prosequuta usque ad conclusionem, *Analysis* dicitur; unde methodus *analytica*, sive *reductionis*, quae a problematis conditionibus in principia ascendit.

41. Si in quavis aequatione, quantitatum situs mutatio, una cum signis, quibus sunt affectae, fiat, eandem non reddunt erroneam. Exemp. gr. pro aequatione $a + 5d = 10$ scribi potest aequalis $5d = 10 - a$. Haec operatio, generaliter loquendo, ita producatur in aequationibus, addendo, vel subtrahendo, ut pro uno membro ignotum maneat, si aliter solutio obtineri nequit.

42. Hujusmodi methodus *Anthytesis* nuncupatur, pendetque ejus ratio ex numero 38: Nam in allato exemplo quantitas a, aut destruenda erat, aut cum negativo signo apponenda: eadem de causa aequatio $s + aa - c = c + s - aa$

$a a + 6 d$ reducitur ad sibi aequalem $6 d = s + a a - c - c - s + a a$.

43. Cor. Ergo aequatio $a + c - s - d = l$ est eadem, ac $a + c - s - d - l = 0$: vel haec eadem ratione $a s - c + d = 0$ reducitur ad $a s + d = c$, vel $a s - c = - d$, quam methodum vocare solent *Assymetriam*.

44. Fractiones in aequationis membris elidantur; Hoc fit earundem reductione ad idem nomen, una interim cum communis denominatoris destructione. Sit exemplum in aequatione $c + a = b c + \frac{y - z}{n}$: haec resolvatur ad aequalem $c + a = \frac{b c n + y - z}{n}$: et tandem ad aliam (38) aequalem aequationem $\frac{c n + a n}{n} = \frac{b c n + y - z}{n}$, quae reduci valet (38) ad $c n + a n = b c n + y - z$.

SE-

SECTIO I.

De Simplicibus Aequationibus.

PROBLEMA I.

45. *AB Alexandro interrogatus Callisthenes quotis annis ipse gauderet? respondit, suos cum illis Hephaestionis esse 96, hac ratione, ut Alexius habeat annos duos supra Hephaestionem, et Callisthenes annos amborum una cum aliis 4, quaeritur singulorum aetas?*

R. Alexius sit (40) k, Hephaestion x, Callisthenes z, et $n = 2$. Secundum problematis conditiones habetur positio $k + x + z = 48\,n$. Pro k et z substitutis aequalibus $x + n$, et $2\,x + 3\,n$, habetur (36) $48\,n = x + n + x + 2\,x + 3\,n$. Hujusmodi aequatio reducatur ad simpliciores terminos (8), oritur $48\,n = 4\,x + 4\,n$, ideo (41) $48\,n - 4\,n$, nempe $44\,n = 4\,x$, seu $x = \frac{44n}{4} = 11\,n = 22$, qui quaerebatur. Q. E. F.

h PRO-

PROBLEMA II.

46. *Sunt tres Servi vendendi, quorum tertius valoris denariorum 12 primo additus facit triplum secundi, sed secundo additus producit primum, quaeritur pretium secundi Servi.*

℞. Primus sit y, secundus z, et tertius $a = 12$. Status quaestionis est: $a + y = 3z$, et $a + z = y$: hae duae aequationes per *anthytesin* (41) reduci queunt ad aequales $3z - y = a$, et $y - z = a$; ideoque habetur (38) $3z - y + y - z = 2a$, sed (8) $3z - y + y - z = 2z$; ergo (36) $2z = 2a$, nempe $z = a$. Q. E. F.

PROBLEMA III.

47. *Quaeritur discipulorum numerus, eo casu, quo si singuli solvant denarios 5, Magister adhuc indiget numis 30; si vero solvant 6, supersunt sibi 40?*

℞. * Discipuli sint k, Magister y, et $a = 5$, et $b = 6$. Habetur itaque $ak = y - 6a$, et $bk = y + 8a$, ergo $y = ak + 6a$ (41), $y = bk - 8a$, sed $\overline{a + b} \times k = 2y + 2a$, ideo $2bk - 16a = 2y$, factaque permutatione aequalium (36) exur-

exurgit $\overline{a+b}\times k = 2\,b\,k - 14\,a$, ergo $a\,k = b\,k - 14\,a$ (18) ; mutatisque locis, et signis, habemus $14\,a = a\,k - b\,k = k\times\overline{a-b} = k$. Q. E. F.

PROBLEMA IV.

48. *Petrus, et Antonius numos 60 raptim sumsere : tandem primus reddidit huic quartam partem ablati, et alter tertiam illi. Quo facto, singuli inventi sunt habere aequalem partem. Quaeritur quantum unusquisque rapuerit?*

R. * Petri rapina sit x, Antonii sit k. Habetur itaque ex hyp. $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}k = \frac{1}{3}k + \frac{3}{4}x$. Caeterum ex dictis numero 43, fiat $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}k - \frac{1}{3}k - \frac{3}{4}x = 0$, seu $\frac{1}{3}k - \frac{1}{2}x = 0$, hoc est (41) $\frac{1}{3}k = \frac{1}{2}x$, sive $\frac{2}{3}k = x$; sed $x + k = 60$, ex hyp. ; ergo $k + \frac{2}{3}k = 60$, ideoque $k = 36$, et $x = 24$. Q. E. F.

PROBLEMA V.

49. *Sejus, et Cajus, habent singuli nummorum summam ignotam; nota vero est conditio, ut si Cajus det 12 Sejo, hic fiat sextuplo ditior illo in reliquo; et si Sejus dat 15 Cajo, hic decuplo locupletior Sejo inveniatur: quaeritur singulorum summa?*

R. * Sejus sit z, et Cajus sit y; $a = 12$, et $b = 15$. Habetur ex problematis positione $6y - 6a = a + z$, et $10z - 10b = b + y$, factaque harum additione, oritur (38) $6y - 6a + 10z - 10b = a + z + b + y$; haec aequatio reducatur (41) ad aequalem $6y + 10z - z - y = 6a + 10b + a + b$, quae tandem ad minimos terminos (8) resoluta, dat $5y + 9z = 7a + 11b$; sed ex hyp. $6y - 6a - a = z$, nempe $6y - 7a = z$; ergo, hac (38) ducta in 9, habetur $54y - 63a = 9z$; ideoque substitutis quantitatibus aequalibus, oritur (36) $5y + 54y - 63a = 7a + 11b$, sive (41) $59y = 70a + 11b$; quocirca $y = \frac{70a + 11b}{59}$ Q. E. F.

PROBLEMA VI.

50. * *Ex puncto* B *aptare angulum rectilineam lateri* B F , *qui sit dimidium anguli dati* F B O *recto minoris*.

R. Supponatur factus angulus $c = \frac{1}{2} x$. Ex puncto O (Geom.) ope circuli haberi potest $On = OB$, ideoque angulus $x = d$ (Geom.) ; et quoniam angulus $x = 2c$, sive $d = m + c$ (Geom.), erit $m = c$, idcirco (Geom.) $nB = nm$. Hinc per consequens, facta $Od = OB$, et $dm = dB$, et ducta mB, habetur angulus $c = \frac{1}{2} x$. Q. E. F. *Fig.1.*

PROBLEMA VII.

51. *Angulum* F B O , *recto minorem*, *trisecare*.

R. * Ope circuli Bng supponatur $Og = OB$, et $gF = gB$, ergo angulus $F = FBg$ (Geom.) ; sed externus OgB, sive aequalis $gBO = F + FBg$; ergo etc. Q. E. F. *Fig.1.*

Vel. * Si datus angulus L B N recto sit major, aut aequalis, supponatur jam facta trisectio ope rectarum C B, A B. Ductis L C, C A, A N, et L N, triangula L B C, C B A, A B N aequicrura erunt: pariter Isoscele est C L P; nam *Fig.4.*

triangula P L C , P B X sunt similia ob angulos in P *ad verticem* aequales , et ob angulum *ad peripheriam* C L P $= \frac{1}{2}$ C B N $=$ C B A .

PRAXIS . Si itaque in centro O , vel B una regulae extremitas immobiliter figatur , et altera extremitas tantum mobilis versus F , vel N tamdiu moveatur , quoad in primo casu habeatur F $g = g$ B ; vel L C $=$ L P in secundo casu ; erit recta B g , sive B C , quae tertiam sumit partem anguli F B O .

Fig. 1. 4.

PROBLEMA VIII.

52. *In dato circulo Hexagonum inscribere.*

R. Supponatur factum . Ex centro circuli ducantur radii in ejus angulos : exurgunt triangula isoscelia $h\,i\,f$, $e\,l\,g$ etc., et aequalia , quia aequilatera ; sed (Geom.) angulus $i + l + n = 180°$, et $h + i + f = 180°$, ergo $h + f = l + n$, sed $n = l = i$; ergo $i = h = f$; et per consequens $h\,f = i\,h$; nempe latus Hexagoni aequale est radio circuli . Q.E.F.

Fig. 2.

SE-

SECTIO II.

De Aequationum Compositarum Resolutione.

DEFINITIONES.

53. AEquatio dicitur *Composita*, si gradus secundos, et ulteriores habet, nempe si *simplex* non sit.

54. Haec *ordinata* nuncupatur, si quantitates habeat in membris ordinatas secundum arithmeticam progressionem naturalem: Itaque $y = c^2 + b d^4 - 5 l^3 - d$ erit *ordinata* sic designata si fuerit $y = b d^4 - 5 l^3 + c^2 - d$.

55. Tandem dicitur *Affecta*, si in altero membro aequationis una cum radice quantitatis alius membri fuerit adnexa quantitas incognita, ex. gr. aequatio $y^2 = y + b$ *affecta* nuncupatur.

56. *Valor* rationis, sive geometricae progressionis, est quotus ortus ex divisione consequentis per antecedentem quantitatem.

AXIOMA.

57. Eadem est aequatio $a^2 \times c^3 \times d^4 = y$; atque $4a^2 \times c^3 \times d^4 = 4y$. Similiter alia $a^2 \times \frac{1}{4} b = x$ aequatur $a^2 \times b = 4x$. etc.

CANONES PRO RESOLUTIONIBUS.

58. Composita aequatio reducatur, si possibile est, vel *addendo*, vel *subtrahendo*, vel *dividendo* ad simpliciores terminos, ad hoc ut expeditior, et minus implicata evasura sit Analysis.

59. Compositae aequationis quantitates reddantur (54) ordinatae. Haec regula ita adamussim servanda est, ut si plures in eodem membro ejusdem gradus pateant termini, horum unus subter alio describatur. Hinc pro irregulari $-a^3 + b^2 - s + c - x^4 + l^4$ habeatur ordinata

$$\begin{array}{llll} l^4 & -a^3 & +b^2 & -s \\ & -x^4 & c^2 & \end{array}$$

60. Pro totali membrorum ordinatione; si eveniat deesse aliquam potestatem intermediam, pro ordine servando illa asterisco * compleatur. Hic deest secunda potestas, ideoque sic notetur: $a^3 * + 3c - s$.

61. Coroll. Hinc ex eo, quia ex. gr. pro

pro $s^2 + 3 = c - d^2$ ponitur $s^2 + 3 = d^2 - c$, eruitur, in quantitatibus signa hoc tantum denotare, nempe differentias inter easdem quantitates.

62. Quae animadversa fuere pro aequationibus generatim num°. 39 etc., eadem hic valeant, si opus fuerit.

PROBLEMA I.

63. *Resolvere aequationem* $y^2 = y + 6$.

R. * Problema veluti solutum habeatur (40): radix y sit A B, ideoque $y^2 - y$ aequalis rectangulo A X, cujus quadruplum dat A D, sive (Geom.) A L C O F N: qua figura reddita completa, additione quadrati F C, habetur quadratum A K. Hinc oritur aequatio $\sqrt{AK} + 1 = 2y$. Q. E. F. *Fig.* 31

In numeris. Ex quadruplo numeri 6, addita sibi unitate, extrahatur radix quadrata, nempe $\sqrt{25} = 5$: radici 5 addatur unitas, et summae 6 sumatur dimidium $3 = y$.

64. Coroll. I. Si quantitas coefficientem habuerit, in hunc ducatur quadruplum alius membri noti; et ex producto, addita unitate, extrahatur radix, cujus, addita unitate, dimidium dividatur per coefficientem, habetur quotus $= y$. Sit data aequa-

aequatio $2y^2 = y + 66$: 1°. habetur $4 \times 66 \times 2 = 528$; 2°. oritur $\sqrt{529} = 23$; et 3°. habetur $\frac{23 + 1}{2 \times 2} = 6 = y$.

Et ratio patet ex eodem ratiocinio.

65. COROLL. II. Eadem methodo resolvitur aequatio $x^2 = 8x + 20$, si curae sit, ut $8x$ reducatur ad simplicem x; quod divisione per 8 (58) utriusque membri obtinetur : habetur itaque aequatio antecedenti aequalis $\frac{1}{8}x^2 = x + 2\frac{1}{2}$.

66. COROLL. III. Pariter si aequatio habeat in primo membro radicem cum potentia, sed sub signo negativo, res eodem modo expediri valet; quoniam (41) idem est $3y^2 - y = 66$, et $\frac{1}{8}x^2 - x = 2\frac{1}{2}$, atque aequationes $3y^2 = y + 66$, et $\frac{1}{8}x^2 = x + 2\frac{1}{2}$.

PROBLEMA II.

67. *Aequationem $y^2 + y = 6$ determinare.*

R. * Supponatur radix $y = AX$, erit itaque $y^2 + y = AZ$, cujus quadruplum aequale rectangulo AD (Geom.), sive, addito quadrato parvo, aequale erit quadrato AK; ergo habetur aequatio $\sqrt{AK} - 1 = 2y$.

In numeris. Ex quadruplo ipsius 6 cum unitate, extracta radice, oritur 5, ex quo

quo demta unitate, et residui 4 medietate sumta, habetur $2 = y$.

68. COROLL. Si coefficiens adsit, ultra praenotata, utamur oportet multiplicatione nempe quadrupli in coefficientem, et radicis dimidii divisione per eundem. Ex. gr. in numeris resolvenda sit aequatio $2x^2 + x = 21$. Fiat $4 \times 21 \times 2 = 168$, ex quo, addita unitate, extrahatur radix, habetur $\sqrt{169} = 13$; fiat $13 - 1 = 12$, et $\frac{12}{2} = 6$ dividatur per coefficientem 2, habetur $3 = x$.

PROBLEMA III.

69. *Aequationem* $y^2 + z^2 = 41$, *et* $y^2 - z^2 = 9$ *reducere*.

R. Ex dictis numero 41, primae aequationi habetur aequalis $y^2 = - z^2 + 41$, et pro secunda oritur alia sibi aequalis $y^2 = z^2 + 9$. Hinc quia ambo habent commune membrum y^2, possumus (36) sumere aequationem $- z^2 + 41 = z^2 + 9$, aequalem sibimet sic (41) dispositae $41 - 9 = 2z^2$, nempe $32 = 2z^2$, sive $16 = z^2$; ideoque $4 = z$. Q. E. F.

THEO-

THEOREMA

70. *In progressione geometrica quivis terminus aequatur producto ex primo, ducto in valorem, elevatum ad potentiam, secundum datum terminorum numerum, unitate deminutum.*

D. Progressio geometrica sic exprimi debet, $a : ay : ay^2 : ay^3 : ay^4$ etc. Primus terminus sit a, valor rationis sit y. Itaque ex. gr. quintus terminus est $ay^4 = ay^{5-1}$, sive generaliter; quivis terminus $z = ay^{m-1}$: ergo ex ipsamet inspectione progressionis sic descriptae patet Theorematis evidentia. Q. E. D.

71. Coroll. I. Pariter ex eadem progressionis ordinatione notum fit, rectangulum ex extremis aequari illi ex mediis aequedistantibus, sive quadrato ex medio, si dispares sunt termini.

72. Coroll. II. Patet itaque exponens alicujus quantitatis superari in unitate ex numero terminorum. Hinc, dato primo termino a, et valore y, quintus terminus progressionis erit ay^4, et octavus erit ay^7, sive generaliter $= z^{m-1}$.

In numeris. Sit $a = 2$, et $y = 3$, quintus terminus erit $2 \times 3^4 = 162$.

73. Coroll. III. Dato numero terminorum, et extremis, invenitur valor ratio-

tionis, quo progressio procedit, si ex quoto extremi termini per primum divisi, radix extrahatur illa, cujus index sit terminorum numerus, unitate minutus: ex. gr. oritur $y = \sqrt[4]{\frac{a y^4}{a}} = \sqrt[4]{y^4}$.

Ita in numeris. Progressio sit 2 : 6 : 18 : 54 : 162, erit ex dictis valor ejusdem $\frac{6}{2} = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = 3$.

PROBLEMA IV.

74. *Datis extremis terminis, et valore, invenire summam omnium terminorum.*

R. In supradescripta progressione primus terminus est a, extremus sit x, et valor sit y. Habetur primo summa omnium antecedentium ad illam consequentium, uti primus terminus (38) ad secundum, nempe $s - x : s - a = a : ay$, consequenter habetur $s a y - a x y = a s - a a$ (71): haec aequatio divisa per a praestat (38) $s y - x y = s - a$; sed haec reduci valet (41) ad $s y - s = x y - a$; ergo pro generali regula oritur: $s = \frac{x y - a}{y - 1}$. Q. E. F.

In numeris. Primus terminus sit 2, valor 3, et extremus sit 54: fiat $54 \times 3 = 162$, et $\frac{162 - 2}{3 - 1} = 80$, qui summa est omnium terminorum. PRO-

PROBLEMA V.

75. *In eadem progressione invenire numerum terminorum, datis extremis a et x, et rationis valore y.*

R. Numerus terminorum sit m. Habemus ex dictis (70) extremum terminum aequalem primo, in valorem ducto, elevatum in gradum illum, quem exprimit numerus terminorum, minus unitate; ergo idem, ac $a y^{m-1}$, ideo $\frac{ay}{a} = m - 1$. Q. E. F.

In numeris. Primus, et extremus terminus sit 2, et 54, valor sit 3. Ipse 54 dividatur per 2, habetur 27; sumantur potestates ex 3 usquedum habeatur 27, et gradui 3 addatur unitas, habetur 4 numerus terminorum.

PROBLEMA VI.

76. * *Ex data quantitate e praestare Cylindrum, cujus altitudo quadrupla sit diametri basis ejusmet.*

R. Ratio diametri ad circumferentiam sit a; basis diameter sit y: ergo basis peripheria $= a \times y$, et ejusdem basis area (Geom.) $= a \times y \times \frac{1}{4} y$; et Cylindri soliditas $e = a \times y \times \frac{1}{4} y \times 4y$. Hu-

Hujusmodi aequatio resolvi potest (18) in aequalem $e = a \times 4y^2 \times \frac{1}{4}y$; et ob $4y^2 \times y = 4y^3$ (18), erit (57) $4e = a \times 4y^3$, ideoque $\frac{4e}{a} = 4y^3$, ergo $\frac{e}{a} = y^3$, ideoque etc. Q. E. F.

77. In numeris. Si $e = 1609\frac{1}{7}$ dividatur per $a = 3\frac{1}{7}$, et quoti 512 sumatur radix cubica 8, haec erit diameter Cylindri quaesiti.

Finis Arithmeticae, et Algebrae.